# AUTOMATIQUE
# SÉANCE N°5: SYNTHÈSE

L'exercice suivant a pour but de se rafraîchir la mémoire sur certains aspects du domaine de l'automatique déjà étudiés.

On cherche à réguler en température une pièce d'une habitation à l'aide d'un radiateur électrique connecté sur le réseau EDF dont la puissance électrique est réglable à l'aide d'une tension de commande. Pour la suite de l'exercice, on notera $\theta$ la température de la pièce et $V_{CMDE}$ la tension de commande du radiateur. Un essai indiciel (représenté à la FIGURE 1) a été réalisé, les résultats sont présentés ci dessous. **Les variables manipulées dans le domaine de l'automatique sont des tensions images des grandeurs physiques du système**. Nous noterons $V_\theta$ la tension image de la température de la pièce (issue d'un capteur de température).

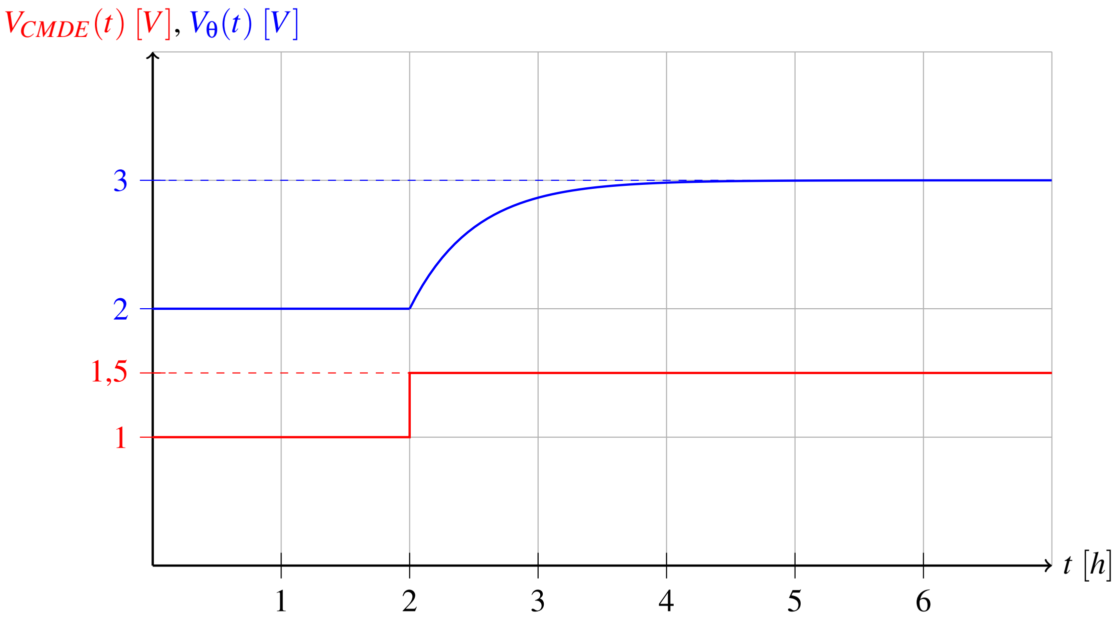



FIGURE 1 – Essai indiciel en boucle ouverte

La fonction de transfert correspondante (FIGURE 2) dans le domaine de Laplace est notée $F(p)$ :

$$F(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_{CMDE}(p)}$$

Aucune contre-réaction ne vient influer sur la tension de commande. C'est à dire que la moindre perturbation sur la température de la pièce (ouverture d'une fenêtre, 15 personnes dans la pièce...)

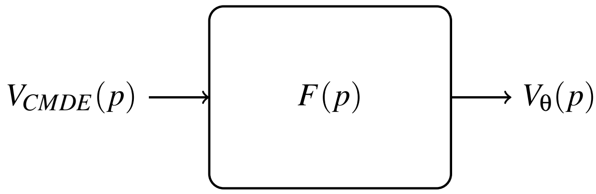



FIGURE 2 – Fonction de transfert en boucle ouverte

n'est pas "vue" par le système et n'est donc pas prise en compte. Le système est dit en "Boucle Ouverte", on parlera de fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

1. Identifier à l'aide de l'essai indiciel la fonction de transfert $F(p)$
   (a) Quel est l'ordre de la fonction de transfert $F(p)$ ?
   (b) Déduire de l'essai indiciel les valeurs des constantes de la fonction de transfert
2. On cherche désormais à prendre en compte l'évolution de la température de la pièce pour déterminer la "bonne" tension de commande. On parle dans ce cas de Boucle Fermée.
   (a) Donner le schéma bloc correspondant
   (b) Exprimer alors la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)
   (c) Quel est l'ordre de la fonction de transfert en boucle fermée ?
   (d) Déduire alors les constantes de la fonction de transfert en boucle fermée.
   (e) Tracer alors la réponse en température de la pièce à l'échelon indiciel représenté à la FIGURE 3.

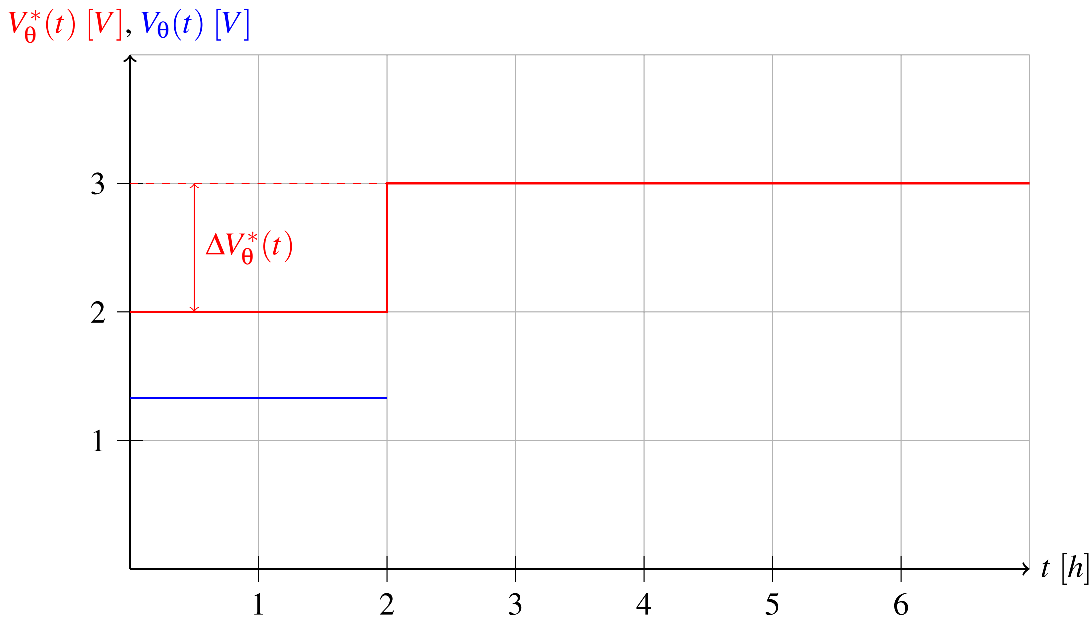



FIGURE 3 – Réponse temporelle du système en boucle fermée

   (f) Conclure sur l'intérêt de la contre-réaction
3. On cherche désormais à corriger notre régulation avec un correcteur noté $C(p)$. Représenter alors le schéma bloc de la régulation en boucle fermée. En déduire la nouvelle expression de la FTBF en fonction de $C(p)$.

4. Le premier correcteur utilisé est un correcteur dit proportionnel :

$$C(p) = G$$

Exprimer alors la fonction de transfert et tracer la réponse au même échelon de température de consigne pour un gain du correcteur fixé à $G = 3$

5. Quel est l'intérêt de l'utilisation d'un correcteur proportionnel ? Existe t-il des limites en terme de gain ?
6. Le deuxième correcteur utilisé est un correcteur dit proportionnel et intégral :

$$C(p) = K_{PI}.\frac{1+\tau_{PI}.p}{\tau_{PI}.p}$$

Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée.

7. Pour régler le correcteur, on se propose d'utiliser la méthode dite de compensation de pôles.

Exprimer alors la FTBF, quel ordre de fonction de transfert obtenons nous ? Régler le gain du correcteur pour obtenir le même temps de réponse que pour le correcteur proportionnel. Représenter la réponse en température de l'asservissement sur la même figure. Quel est l'intérêt du correcteur proportionnel intégral ?

1. La lecture de l'essai indiciel nous renseigne sur l'ordre du système.
   (a) Il s'agit d'une fonction de transfert du premier ordre :

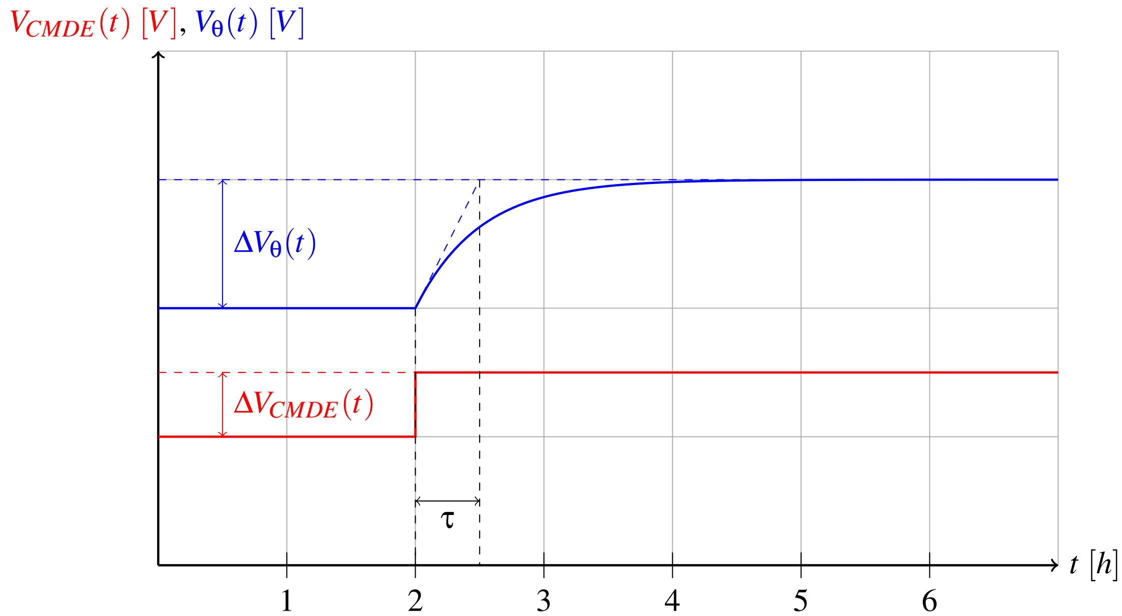
$$F(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_{CMDE}(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}$$

   Avec :
   – $K$ : Gain statique de la fonction de transfert
   – $\tau$ : Constante de temps de la fonction de transfert

   (b) L'essai indiciel nous permet de déterminer les 2 constantes de la fonction de transfert en Boucle Ouverte. Le gain statique est défini de la manière suivante :

$$K = \frac{\Delta V_\theta(t)}{\Delta V_{CMDE}(t)}$$

   La constante de temps $\tau$ est quant à elle déterminée en traçant la tangente initiale de $V_\theta(t)$.




   Les valeurs des constantes des différentes constantes sont donc les suivantes :
   – $K = \frac{1}{0,5} = 2$
   – $\tau = 0,5\ h$

2. Le "bouclage" du système est réalisé à l'aide d'une contre-réaction.
   (a) Le système en boucle fermée est représenté sous forme de schéma bloc à la FIGURE 4. On considère que la mesure correspond à une fonction de transfert de gain unitaire.

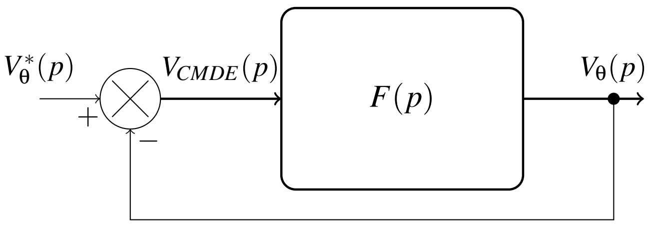



FIGURE 4 – Système en boucle fermée

   Avec $V_\theta^*$ la tension image de la température de consigne de la pièce.

(b) Pour définir la fonction de transfert en boucle fermée ($FTBF(p)$), il suffit de lire sur le schéma bloc :

$$V_\theta(p) = F(p).V_{CMDE}(p)$$

Et :

$$V_{CMDE}(p) = V^*_\theta(p) - V_\theta(p)$$

Il suit :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V^*_\theta(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)}$$

Nous connaissons la fonction de transfert en boucle ouverte, d'où :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V^*_\theta(p)} = \frac{K}{K+1}.\frac{1}{1+\frac{\tau}{K+1}.p}$$

(c) La FTBF est donc elle aussi un premier ordre. Elle peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V^*_\theta(p)} = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}.p}$$

Avec :
– $K_{BF}$ : Gain statique de la FTBF

$$K_{BF} = \frac{K}{K+1}$$

– $\tau_{BF}$ : Constante de temps de la boucle fermée

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{K+1}$$

(d) Application numérique :
– $K_{BF} = 0,66$
– $\tau_{BF} = 0,16\,h$

(e) La réponse temporelle de l'asservissement à un échelon de la température de consigne peut alors être tracée (FIGURE 5).

(f) On peut voir sur la figure précédente que la contre réaction permet de suivre l'évolution de la température de consigne, qui plus est avec une constante de temps plus rapide que celle de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cependant, on peut remarquer qu'en régime permanent, la température de la pièce n'est pas égale à la température de consigne. Il subsiste une erreur, appelée erreur statique ($\varepsilon_s$) qui est définie de la manière suivante pour un système sans intégrateur :

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta V^*_\theta}{1+K_{BO}}$$

Avec :
– $\Delta V^*_\theta$ : Amplitude de l'échelon en tension de température de consigne
– $K_{BO}$ : Gain statique de la boucle ouverte

Pour conclure, plus le gain statique de la boucle ouverte sera élevé, plus l'erreur statique sera faible et plus la dynamique de l'asservissement sera élevée.

3. Le nouveau schéma bloc est représenté à la FIGURE 6.

En raisonnant sur le schéma bloc de l'asservissement en boucle fermée, il suit :

$$V_\theta(p) = C(p).F(p).\varepsilon(p)$$

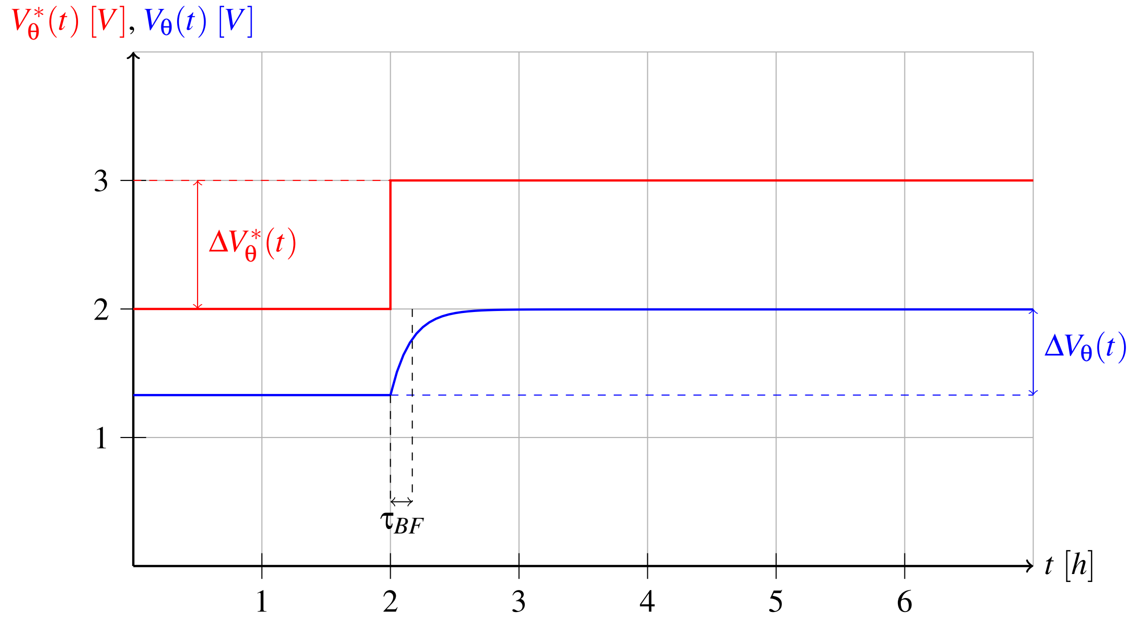



FIGURE 5 – Réponse du système en boucle fermée à un échelon de la température de consigne

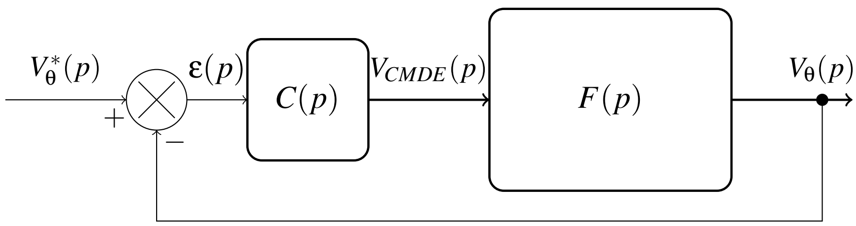



FIGURE 6 – Système en boucle fermée avec correction

et :

$$\varepsilon(p) = V_\theta^*(p) - V_\theta(p)$$

D'où :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{C(p).F(p)}{1 + C(p).F(p)}$$

4. Le correcteur est tout d'abord considéré comme un simple gain, il s'agit d'un correcteur dit proportionnel car la tension de commande du système sera simplement proportionnelle à l'erreur entre consigne et mesure.

$$C(p) = G$$

La fonction de transfert en boucle fermée de notre système corrigé s'exprime donc de la manière suivante :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{G.K}{1 + G.K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1+G.K} \cdot p}$$

La fonction de transfert est donc toujours un premier ordre et peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{K_{BF_P}}{1+\tau_{BF_P}.p}$$

Avec :
- $K_{BF_P} = \frac{G.K}{1+G.K}$
- $\tau_{BF_P} = \frac{\tau}{1+G.K}$

Pour G=3, les valeurs numériques des constantes de la fonction de transfert sont donc les suivantes :
- $K_{BF_P} = \frac{6}{7}$
- $\tau_{BF_P} = \frac{0{,}5}{7} \sim 0{,}07\ h$

Il est alors possible de tracer la réponse du système au même échelon de consigne que précédemment (FIGURE 7). La réponse au même échelon de consigne pour un système non corrigé est aussi représentée en vert sur la figure.

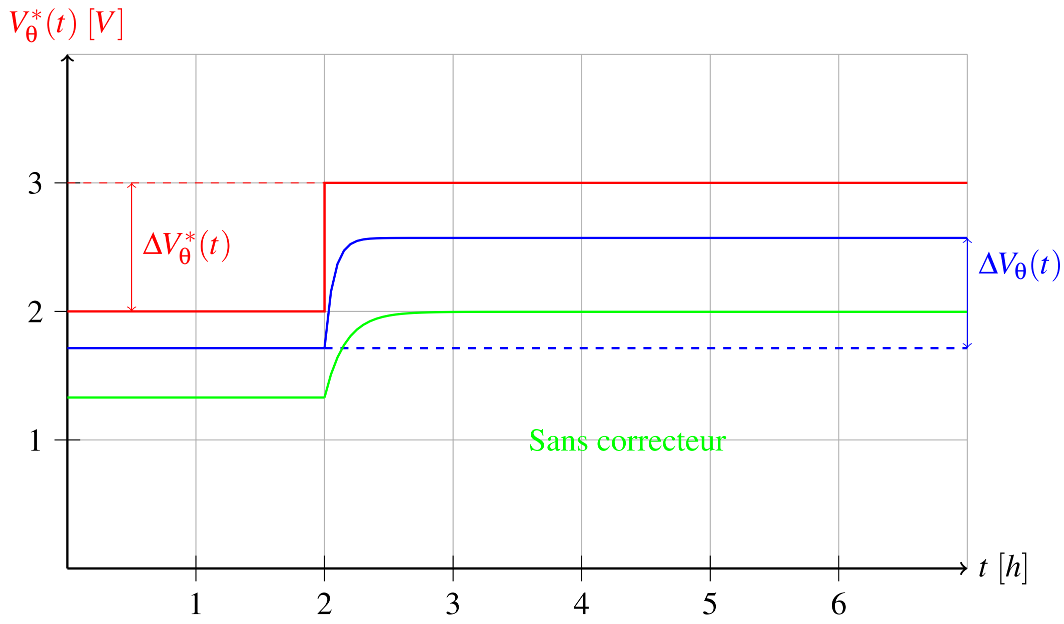



FIGURE 7 – Réponse du système en boucle fermée à un échelon de la température de consigne avec un correcteur proportionnel de gain 3

5. Il est possible de remarquer sur la FIGURE 7 que l'utilisation d'un correcteur proportionnel permet d'améliorer la dynamique de l'asservissement et de diminuer l'erreur statique (le gain de la boucle ouverte étant plus élevé). Théoriquement, un gain infini permettrait d'obtenir un temps de réponse et une erreur statique nuls. Cependant, il faut tenir compte des constantes de temps du système à asservir.
6. Le nouveau correcteur utilisé est un correcteur dit proportionnel intégral. Dans ce cas, l'erreur entre consigne et mesure est amplifiée (action proportionnelle) et intégrée. La fonction de transfert en boucle fermée est toujours de la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{C(p).F(p)}{1+C(p).F(p)}$$

Il suit :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{K_{PI}.K.\frac{1+\tau_{PI}.p}{\tau_{PI}.p}.\frac{1}{1+\tau.p}}{1+K_{PI}.K.\frac{1+\tau_{PI}.p}{\tau_{PI}.p}.\frac{1}{1+\tau.p}}$$

La méthode de la compensation de pôle consiste à fixer la constante du correcteur égale à la constante de temps du système à asservir :

$$\tau_{PI} = \tau$$

Cette méthode simplifie grandement l'expression de la FTBF :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{K_{PI}.K.\frac{1}{\tau_{PI}.p}}{1 + K_{PI}.K.\frac{1}{\tau_{PI}.p}}$$

Il suit :

$$FTBF(p) = \frac{V_\theta(p)}{V_\theta^*(p)} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{PI}}{K_{PI}.K}.p}$$

Il s'agit là encore d'un premier ordre dont les constantes sont les suivantes :
- Gain statique unitaire
- Constante de temps : $\tau_{BF_{PI}} = \frac{\tau_{PI}}{K_{PI}.K}$

On souhaite conserver la même dynamique qu'avec le correcteur proportionnel de gain 3. Il suffit juste de régler le gain du correcteur :

$$\tau_{BF_P} = \frac{\tau_{PI}}{K_{PI}.K}$$

D'où :

$$K_{PI} = \frac{\tau_{PI}}{\tau_{BF_P}.K}$$

D'où : $K_{PI} = 3,57$

Les différentes réponses à une même évolution de la température de consigne sont regroupées à la FIGURE 8.

Le correcteur PI ajoute une intégration dans la boucle ouverte ce qui permet d'annuler l'erreur statique.

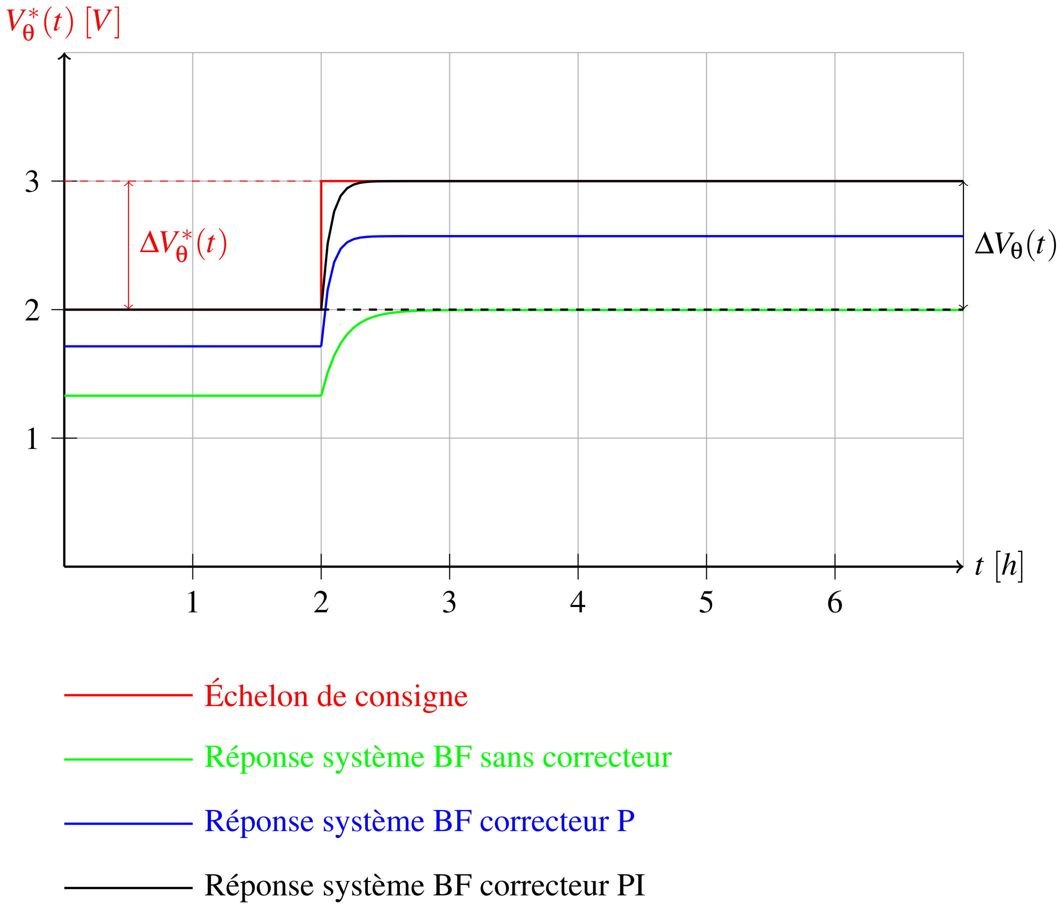



FIGURE 8 – Réponse du système en boucle fermée à un échelon de la température de consigne avec un correcteur proportionnel de gain 3