AUTOMATIQUE
SÉANCE N°3: SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE EN BOUCLE FERMÉE

1 Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice au système $F(p)$, placé dans une boucle à retour unitaire, représenté à la FIGURE 1.

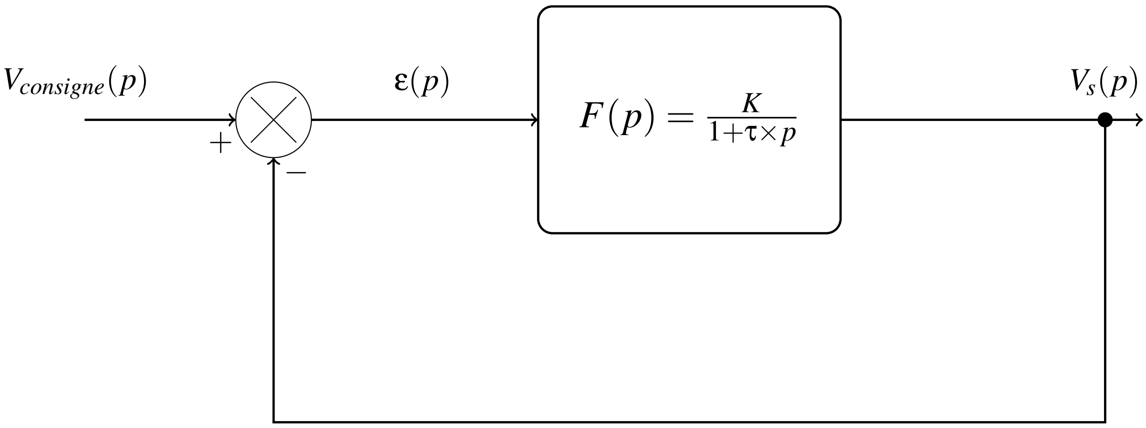

FIGURE 1 – Système du premier ordre en boucle fermée

1. Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte [1]

$$FTBO(p) = F(p) = \frac{K}{1+\tau \times p}$$

2. On cherche maintenant à exprimer la fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF(p) = \frac{V_s(p)}{V_{consigne}(p)}$$

1. Il s'agit de la fonction de transfert liant $V_{consigne}$ et V_s lorsque la boucle de rétroaction est coupée

(a) Exprimer $V_s(p)$ en fonction de $\varepsilon(p)$ et $F(p)$

$$V_s(p) = F(p) \times \varepsilon(p)$$

(b) Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $V_{consigne}(p)$ et $V_s(p)$

$$\varepsilon(p) = V_{consigne}(p) - V_s(p)$$

(c) Déduire des 2 relations précédentes la fonction de transfert en boucle fermée ($FTBF(p)$)

$$\begin{aligned}
&V_s(p) = F(p) \times \varepsilon(p)\\
&V_s(p) = F(p) \times (V_{consigne}(p) - V_s(p))\\
&V_s(p) = F(p) \times V_{consigne}(p) - F(p) \times V_s(p)\\
&V_s(p)(1 + F(p)) = F(p) \times V_{consigne}(p)\\
&\frac{V_s(p)}{V_{consigne}(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)}
\end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'exprime donc de la manière suivante :

$$FTBF(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

3. Mettre la $FTBF$ sous la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \times p}$$

Vous donnerez les expressions des 2 constantes K_{BF} et τ_{BF}

$$FTBF(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau\times p}}{1 + \frac{K}{1+\tau\times p}}$$

$$FTBF(p) = \frac{K}{1 + \tau \times p + K}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{\tau}{K+1} \times p}$$

D'où :

- Gain statique en boucle fermée :

$$K_{BF} = \frac{K}{K+1}$$

- Constante de temps en boucle fermée :

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{K+1}$$

4. **Application numérique** : La constante de temps du système est de 1 h, le gain statique est de 2.
   (a) Calculer les valeurs de τ_{BF} et K_{BF}
   – Gain statique en boucle fermée :

$$K_{BF} = \frac{K}{K+1} = \frac{2}{3}$$

   – Constante de temps en boucle fermée :

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{K+1} = \frac{1}{3}h = 20min$$

   (b) Tracer sur le graphique de la FIGURE 2 la réponse en boucle ouverte et en boucle fermée de ce système en tenant compte de la tension de consigne représentée.
   (c) Le système est-il plus rapide en boucle fermée ou en boucle ouverte ?
   La constante de temps en boucle fermée étant plus faible qu'en boucle ouverte ($\tau_{BF} < \tau$), le système est donc plus rapide en boucle fermée.

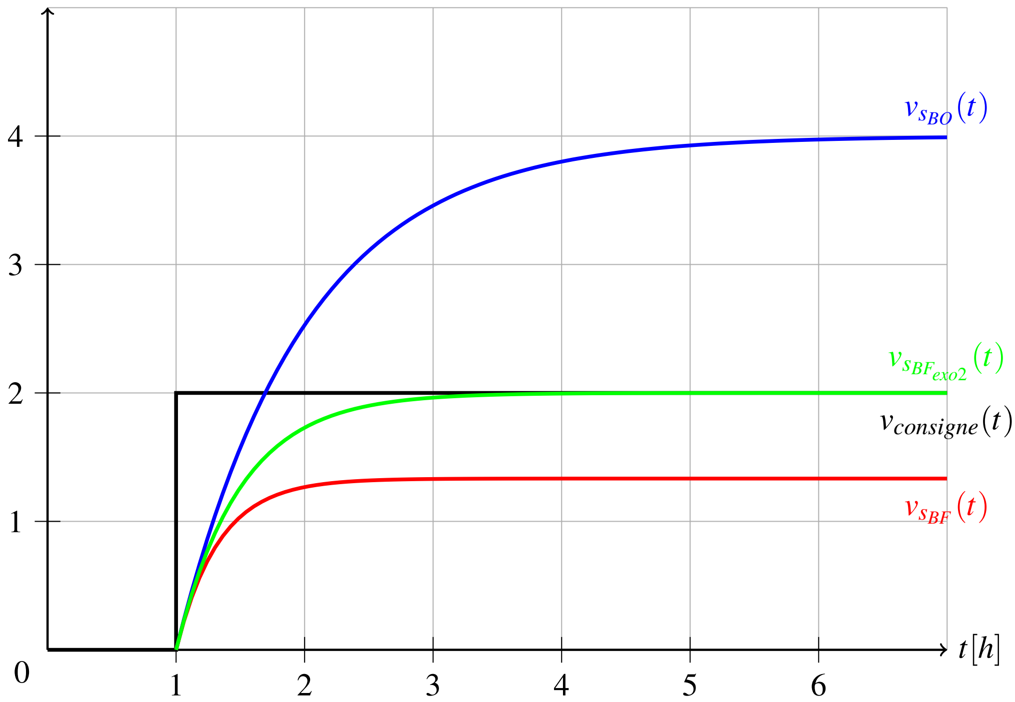

FIGURE 2 – Réponses en boucle ouverte et en boucle fermée

2 Exercice 2

Le même système ($F(p)$) est désormais placé au sein d'une boucle d'asservissement représentée à la FIGURE 3. La grandeur à asservir est désormais mesurée par un capteur (de gain C) avant d'être envoyée dans le comparateur.

1. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF(p) = \frac{V_s(p)}{V_{consigne}(p)}$$

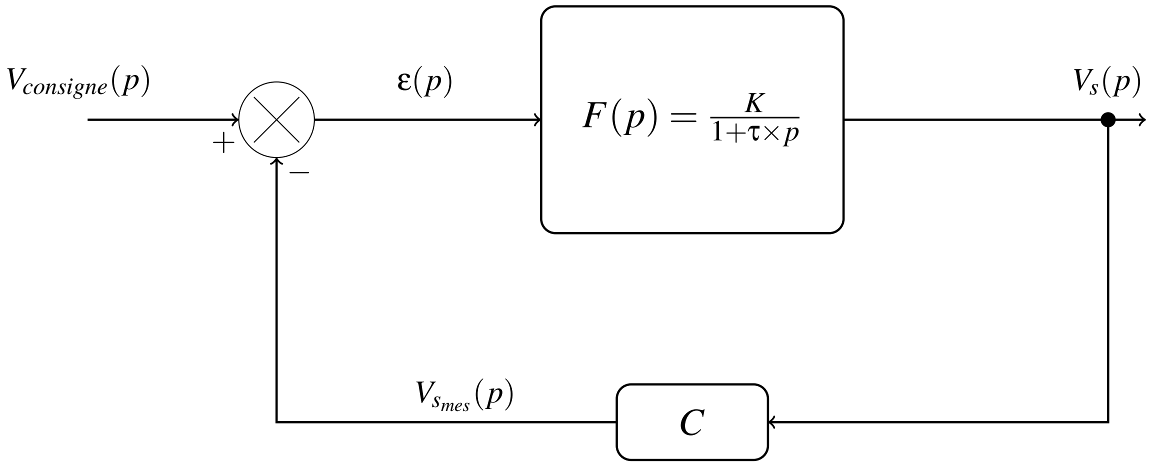

FIGURE 3 – Capteur dans la boucle de retour

Vous donnerez les expressions des nouvelles constantes K_{BF} et τ_{BF}

$$FTBF(p) = \frac{F(p)}{1+C\times F(p)}$$
$$FTBF(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau\times p}}{1+\frac{C\times K}{1+\tau\times p}}$$
$$FTBF(p) = \frac{K}{1+\tau\times p+C\times K}$$
$$FTBF(p) = \frac{\frac{K}{1+CK}}{1+\frac{\tau}{CK+1}\times p}$$

2. **Application numérique** : le gain du capteur est de 0,5. Déterminer les valeurs numériques des constantes K_{BF} et τ_{BF}.
   Nouvelles constantes en boucle fermée :
   – Gain statique en boucle fermée :
   $$K_{BF} = \frac{K}{CK+1} = \frac{2}{2} = 1$$
   – Constante de temps en boucle fermée :
   $$\tau_{BF} = \frac{\tau}{CK+1} = \frac{1}{2}h = 30min$$
3. Tracer alors la nouvelle réponse en boucle fermée de ce nouvel asservissement sur le graphique représenté à la FIGURE 2.