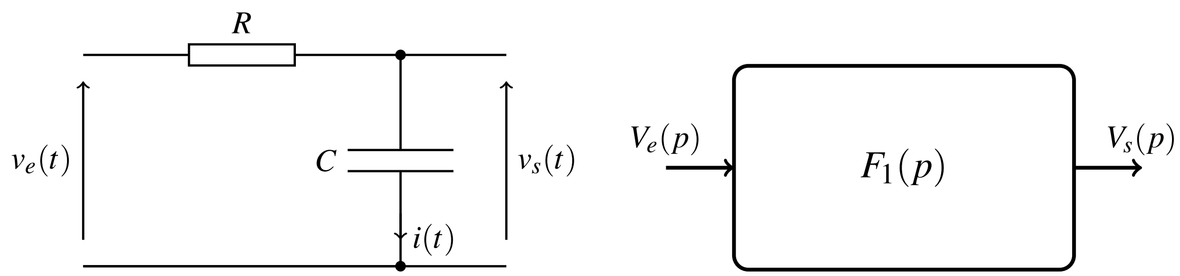
Automatique
Séance n°2: Systèmes du premier ordre

1 Exercice 1 : Circuit RC

Nous nous intéressons dans ce premier exercice au montage représenté à la Figure 1.



(a) Montage étudié — (b) Schéma bloc du système

Figure 1 – Ciruit R-C

1. Quelle est la relation liant le courant $i(t)$ et la tension $v_s(t)$?

$$i(t) = C \times \frac{dv_s(t)}{dt}$$

2. A partir de la loi des mailles, exprimer l'équation différentielle du premier ordre liant $v_e(t)$ et $v_s(t)$

$$v_e(t) = R \times i(t) + v_s(t)$$
$$v_e(t) = RC \times \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$$

3. A l'aide des propriétés de la transformée de Laplace étudiées lors du premier TD, déterminer la fonction de transfert liant $V_e(p)$ et $V_s(p)$. La tension de sortie à l'instant $t = 0$ est considérée nulle.

$$V_e(p) = RCp \times V_s(p) - v_s(0) + V_s(p)$$
$$V_e(p) = RCp \times V_s(p) + V_s(p)$$

4. La forme standard d'une fonction de transfert du premier ordre est la suivante :

$$F_1(p) = \frac{K}{1+\tau \times p}$$

Exprimer sous cette forme la fonction de transfert $F_1(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$ définie à la question précédente. Vous donnerez l'expression des constantes K et τ. Vous préciserez également la signification des constantes K et τ.

$$V_e(p) = RCp \times V_s(p) - v_s(0) + V_s(p)$$
$$V_e(p) = (RCp+1) \times V_s(p)$$
$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1+RCp}$$

Et donc :

$$F_1(p) = \frac{1}{1+RCp} = \frac{K}{1+\tau p}$$

– $K = 1$: gain statique du système
– $\tau = RC$: constante de temps du système

5. La tension d'entrée est constante : $v_e(t) = E$. A l'aide des transformées de Laplace usuelles, déterminer la transformée de Laplace de la tension d'entrée ($V_e(p)$).

$$V_e(p) = \frac{E}{p}$$

6. Déterminer l'expression de la tension de sortie $V_s(p)$.

$$V_s(p) = V_e(p) \times F_1(p) = \frac{E}{p \times (1+\tau p)}$$

7. A l'aide des transformées de Laplace usuelles, déterminer l'expression de la tension de sortie $v_s(t)$.

$$V_s(p) = V_e(p) \times F_1(p) = \frac{E}{p \times (1+\tau p)} = \frac{\frac{E}{\tau}}{p \times (\frac{1}{\tau}+p)}$$

D'après la table des transformées usuelles :

$$v_s(t) = E(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$$

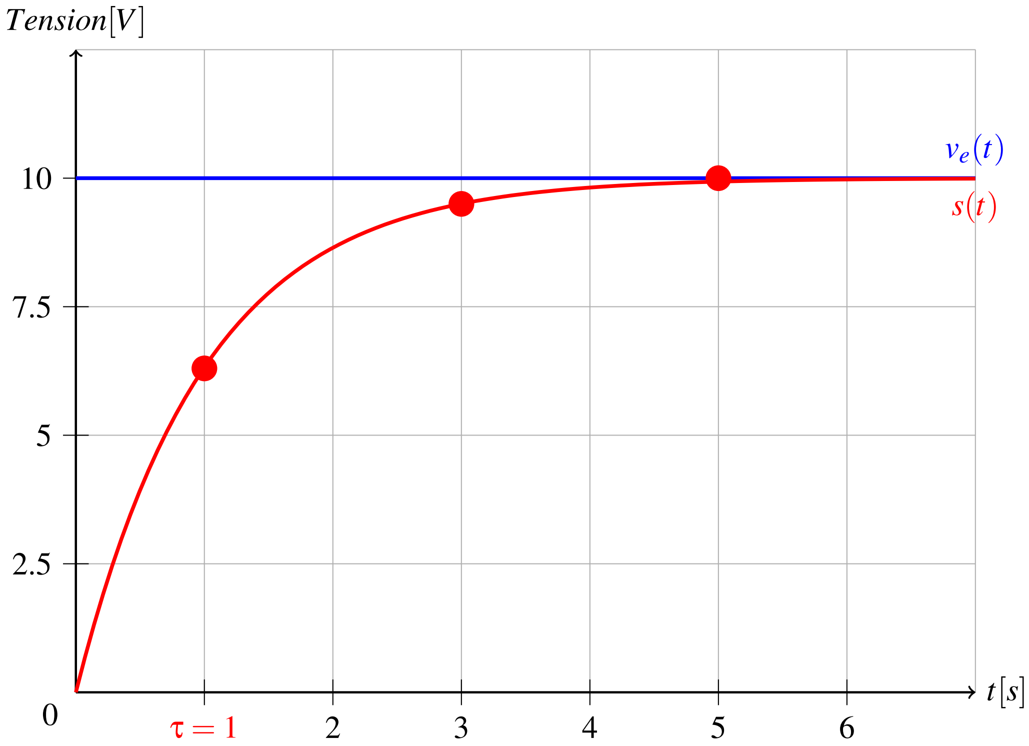
8. **Application numérique :** $E = 10V$, $R = 1000\Omega$, $C = 1mF$. Déterminer la valeur de la tension de sortie pour $t = 0$, $t = \tau$, $t = 3\tau$, $t = 5\tau$. Calcul numérique de la constante de temps :

$$\tau = R \times C = 1000 \times 0,001 = 1s$$

Valeurs de la tension de sortie :

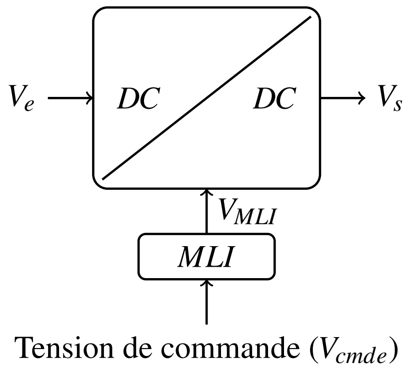
t	$v_s(t)$
0	$10(1-e^0) = 0$
τ	$10(1-e^{-1}) = 6,3 \Rightarrow 63\%$ de la valeur finale
$3.\tau$	$10(1-e^{-3}) = 9,5.E \Rightarrow 95\%$ de la valeur finale ($tr_{5\%}$)
$5.\tau$	$10(1-e^{-5}) = 9,9.E \Rightarrow 99\%$ de la valeur finale

9. Tracer ci-dessous l'évolution de la tension de sortie en fonction du temps.

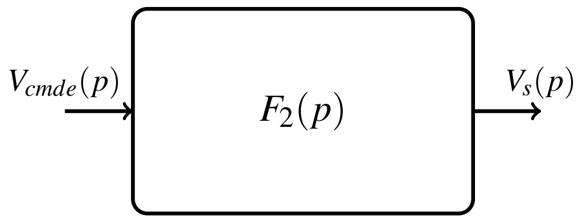


2 Exercice 2 : Hacheur série

Nous nous intéressons dans ce second exercice au montage représenté à la FIGURE 2. Il s'agit d'un hacheur série réalisant une conversion DC/DC en abaissant le niveau de tension d'entrée. A tension d'entrée constante, la grandeur de commande (V_{cmde}) permet de régler la tension de sortie. **Le but de l'exercice est d'identifier le système à partir d'un essai indiciel**, c'est à dire en envoyant un échelon de tension sur l'entrée de commande du système et en observant la sortie.



(a) Montage étudié



(b) Schéma bloc du système

FIGURE 2 – Hacheur série

L'essai indiciel est représenté à la FIGURE 3 (les ondulations de tension dues à la fréquence MLI sont négligées) :

1. Déterminer le gain statique K du système Pour déterminer le gain statique, il suffit de déterminer le **rapport entre sortie et entrée du système en régime permanent**. A l'instant $t = 7ms$,

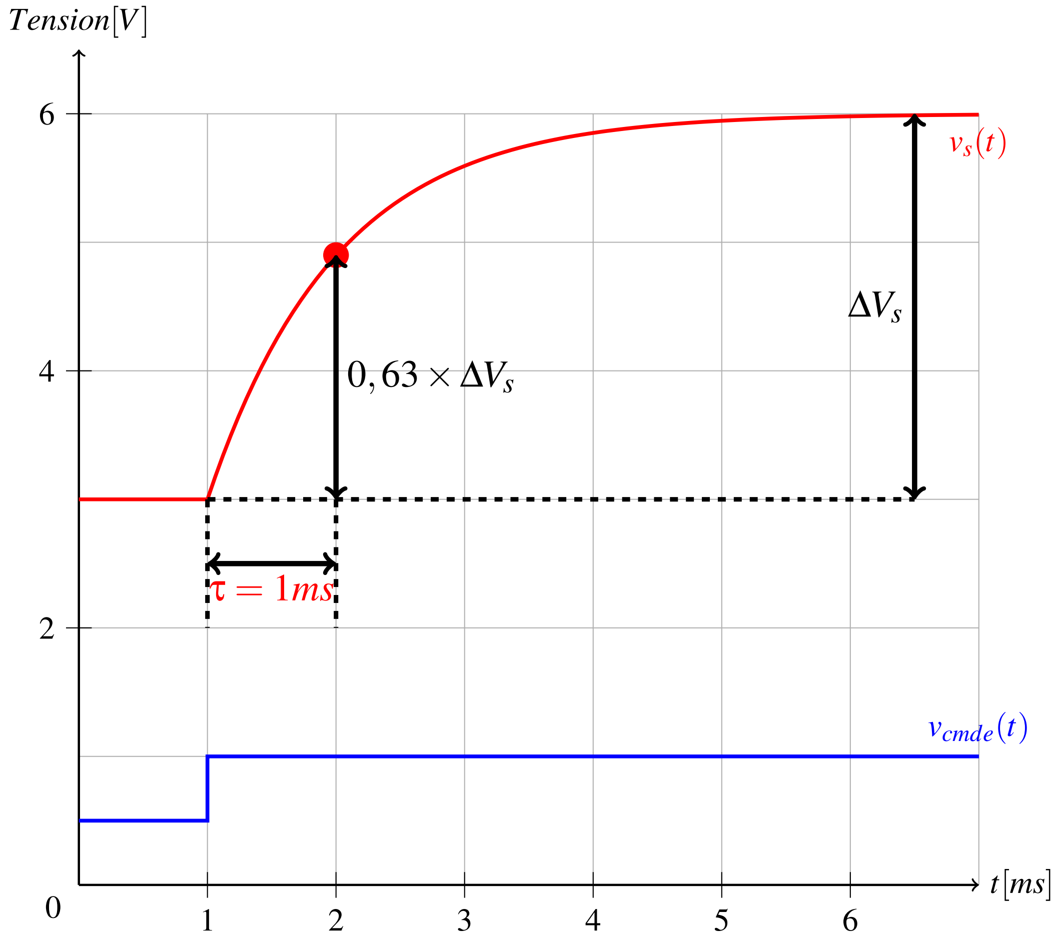


FIGURE 3 – Essai indiciel

la sortie s'est stabilisée :

$$K = \frac{6}{1} = 6$$

Il est également possible de déterminer ce gain avant l'échelon, par exemple à l'instant $t = 0,5ms$:

$$K = \frac{3}{0,5} = 6$$

2. Déterminer la constante de temps τ du système
   Pour déterminer la constante τ, il faut d'abord exprimer la variation totale de la tension de sortie (ΔV_s) suite à l'échelon en entrée. Graphiquement : $\Delta V_s = 3$. Il faut ensuite exprimer 63% de cette variation totale ($0,63 \times 3 = 1,9V$ et l'ajouter à la valeur initiale de la tension de sortie au moment de l'échelon ($t = 1ms$) pour déterminer la valeur de la tension de sortie τ secondes après l'échelon.
3. Exprimer alors la fonction de transfert $F_2(p)$. La fonction de transfert du premier ordre $F_2(p)$ s'exprime donc de la manière suivante :

$$F_2(p) = \frac{K}{1 + \tau \times p} = \frac{6}{1 + 0,001 \times p}$$