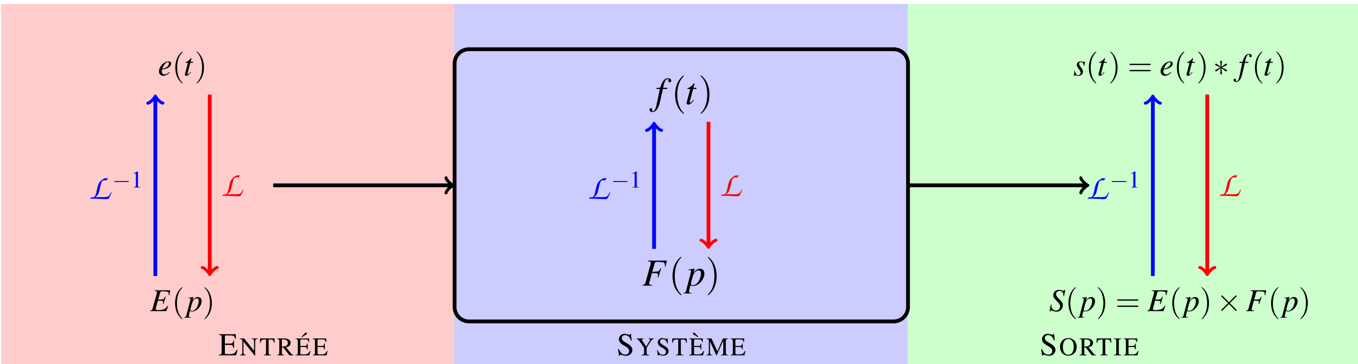
AUTOMATIQUE
SÉANCE N°1: TRANSFORMÉE DE LAPLACE & TRANSFORMÉE DE LAPLACE INVERSE

1 Intérêt de la transformée de Laplace

Considérons un système linéaire $f(t)$ attaqué par un signal $e(t)$. Pour déterminer la sortie de ce système, il existe 2 possibilités :

1. Résolution dans le domaine temporel
2. Résolution dans le domaine de Laplace puis application de la transformée de Laplace inverse



Utiliser la transformée de Laplace permet de simplifier les calculs et d'éviter de calculer des produits de convolution.

2 Exercice 1 : Transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'un signal s'exprime de la manière suivante :

$$X(p) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt \tag{1}$$

1. A partir de la relation (1), déterminer l'expression de la transformée de Laplace du signal $e(t)$ [1] :

$$e_1(t) = 1$$

1. Courage, ce sera la seule et unique transformée de Laplace que vous aurez à calculer !

$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}e(t)dt$$
$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\times 1dt$$
$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$
$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=-\frac{1}{p}[e^{-pt}]_0^{+\infty}$$
$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=-\frac{1}{p}(e^{-\infty}-e^{0})$$
$$E(p)=\mathcal{L}[e(t)]=\frac{1}{p}$$

2. A l'aide de la table des propriétés de la transformée de Laplace(TABLE 1), déterminer la transformée de Laplace du signal $e_2(t)$:
$$e_2(t)=t$$
$e_2(t)$ étant une primitive de $e_1(t)$, la relation suivante est vérifiée :
$$E_2(p)=\frac{E_1(p)}{p}=\frac{1}{p^2}$$

3 Exercice 2 : Transformée de Laplace inverse

1. A l'aide de la table des transformées de Laplace inverses usuelles (TABLE 1), déterminer les transformées de Laplace inverses des signaux suivants :
   - $X_1(p)=\frac{4}{p}$
   - $X_2(p)=\frac{3}{p^2}$
   - $X_3(p)=\frac{2}{p+1}$
   - $X_4(p)=\frac{5}{p\times(1+2\times p)}$

   Les transformées de Laplace inverses des 4 signaux sont les suivantes :
   - $x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_1(p)]=4$
   - $x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_2(p)]=3\times t$
   - $x_3(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_3(p)]=2\times e^{-t}$
   - $x_4(t)=\mathcal{L}^{-1}[X_4(p)]=\frac{5}{2}\times(1-e^{-t/2})$
2. Tracer l'évolution temporelle de ces 4 signaux sur le graphique de la FIGURE 1.

4 Exercice 3 : Application

On s'intéresse au système F(p) suivant :

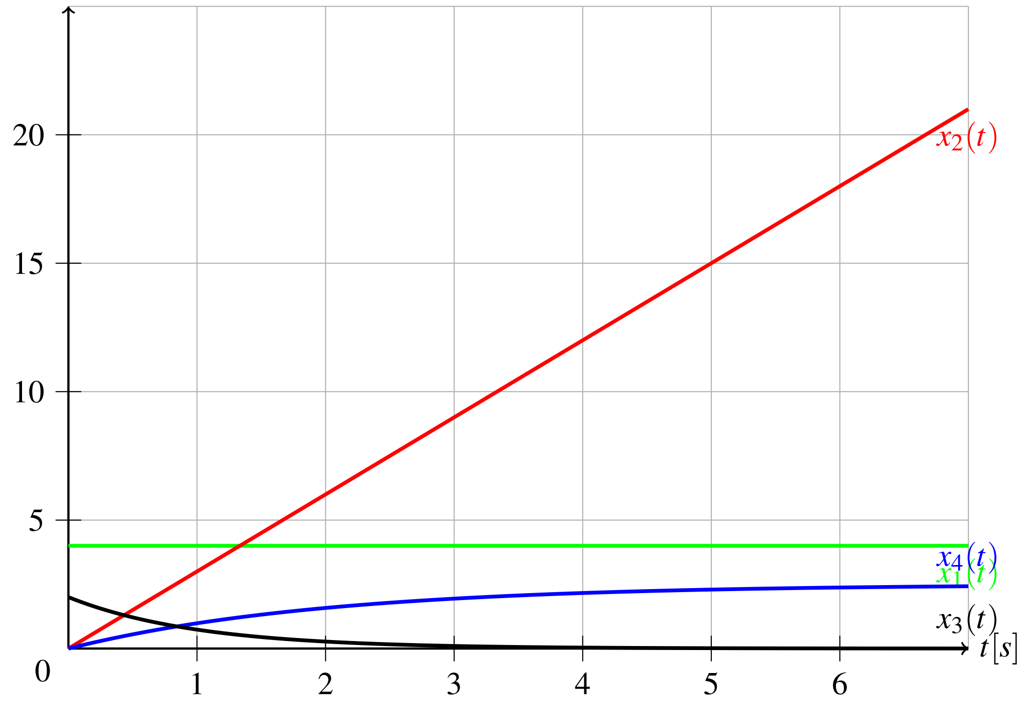
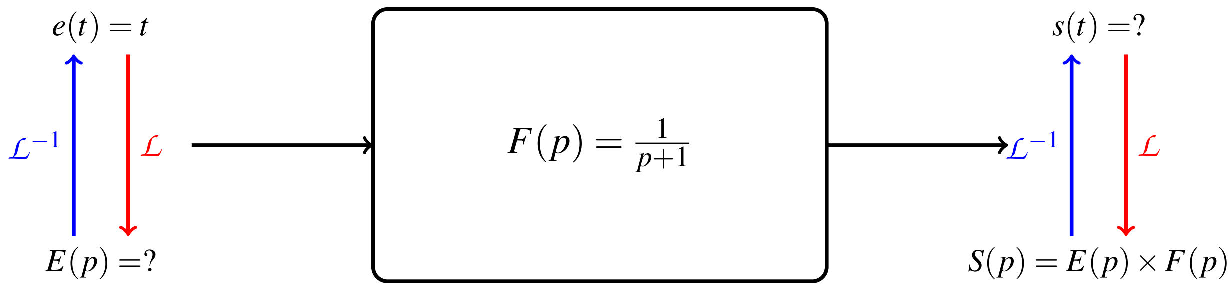


FIGURE 1 – Allure temporelle des signaux



1. Déterminer la transformée de Laplace du signal d'entrée ($E(p)$)

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

2. Déterminer alors la sortie ($S(p)$)

$$S(p) = \frac{1}{p^2 \times (p+1)}$$

3. Faire une décomposition en éléments simples de S(p) La décomposition en élément simple de S(p) est la suivante :

$$S(p) = \frac{1}{p^2 \times (p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1}$$

Par identification :

$$A + C = 0$$
$$A + B = 0$$
$$B = 1$$

D'où :

$$S(p) = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

4. Déterminer alors le signal de sortie $s(t)$
   Il suffit alors d'exprimer la transformée de Laplace inverse en s'aidant de la table des transformées :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] = -1 + t + e^{-t}$$

5. Tracer alors l'évolution du signal de sortie sur le graphique de la FIGURE 2

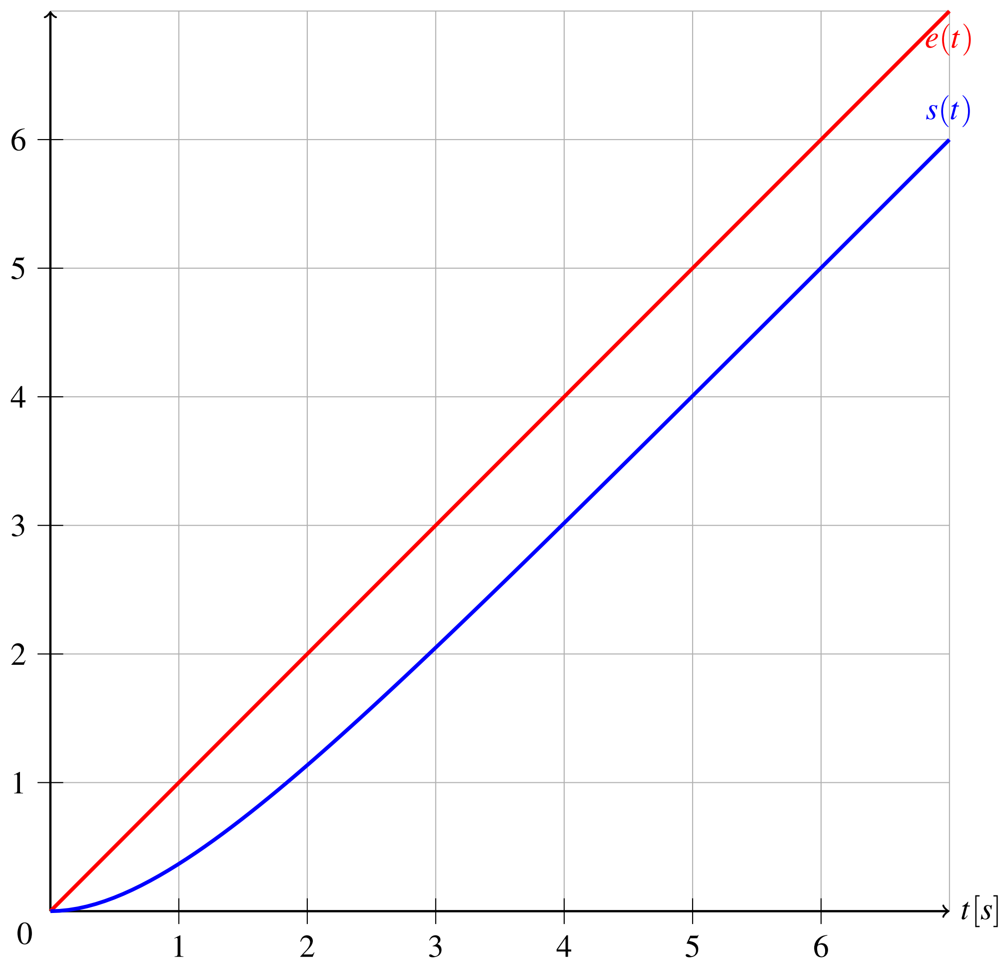


FIGURE 2 – Allure temporelle des signaux

Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Soit f une fonction de la variable réelle t, définie pour $t > 0$ et supposée nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $F(p)$ définie par relation suivante :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$$

où p est une variable complexe (c'est à dire $p = x + jy$, avec $x, y \in \mathcal{R}$ et $j^2 = -1$).

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$ (distribution de Dirac)	1
1 (fonction de Heaviside)	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
dérivation : $f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
intégration : $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$	$F(p)/p$
fct. périodique : $f(t+nT) = f(t)$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$
retard temporel : $f(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{-p\tau} F(p)$
retard fréquentiel : $\mathrm{e}^{-at} f(t)$	$F(p+a)$

TABLE 1 – Transformées de Laplace usuelles et propriétés intéressantes