Travaux Pratiques - Série 3, TP° 2
Séries de Fourier

1 Rappels

Un signal $u(t)$ périodique de période T (de fréquence $f = \frac{1}{T}$ ou de pulsation $\omega = 2\pi f$) est décomposable en une somme de fonctions sinusoïdales :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \tag{1}$$

Avec :
- a_0 : valeur moyenne du signal $u(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \mathrm{d}t \tag{2}$$

- a_n et b_n : coefficients réels de la série de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) \mathrm{d}t \tag{4}$$

Lorsque $n = 1$, on parle de la **composante fondamentale** du signal ayant la pulsation ω. Pour toute autre valeur de n on parle de **l'harmonique de rang** n ayant la pulsation $n\omega$.

2 Exercice

Nous nous intéresserons ici au signal carré représenté dans la Figure. 1.

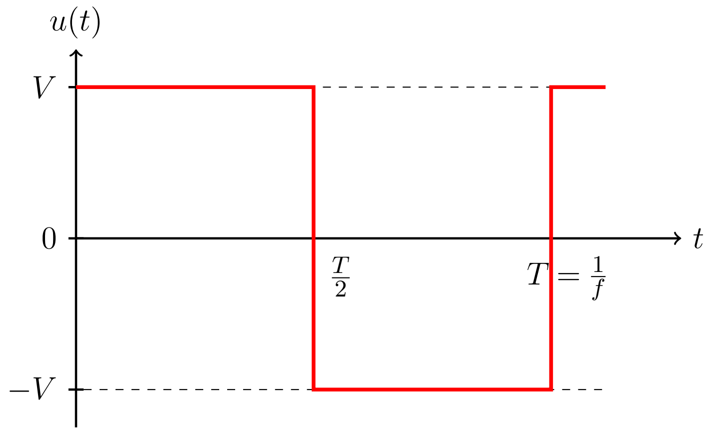

Figure 1 – Signal carré impair.

On prendra les valeurs suivantes : $V = 5$ V et $f = 10$ Hz.

2.1 Représentation du signal

Ouvrir Scilab et créer un fichier SciNotes[1] permettant dans un premier temps de tracer le signal carré de la Figure 1 :

1. Déclarer dans votre fichier SciNotes les constantes que vous utiliserez par la suite : fréquence f et amplitude V.
2. Définir le vecteur temps (on prendra par exemple un vecteur temps allant de 0 à $2 \times T$ en 400 points).
3. Définir les valeurs du signal $u(t)$ pour chaque point du vecteur temps. Vous pourrez utiliser soit une boucle *for* pour balayer chaque point du vecteur temps ou utiliser les fonctions dédiées (par exemple la fonction *ones()*).
4. Tracer ensuite le signal $u(t)$ dans la sous-figure 1.
   La figure qui devra être obtenue à la fin de ce TP sera divisée en 2 lignes et 3 colonnes, (en utilisant la fonction "subplot(a,b,c)").

2.2 Calcul numérique des coefficients de Fourier

1. Écrire les fonctions `an_num` et `bn_num` pour calculer numériquement les coefficients a_n et b_n en se basant sur les relations (2), (3) et (4). Ces fonctions doivent prendre en argument la fréquence, le temps, le signal, et le nombre n d'harmoniques souhaitées et qui rendent en sortie le vecteur de n premiers coefficients de Fourier. Attention, les vecteurs en Scilab commencent à 1 (et non pas à 0 comme en C).

   ```
   function vectan = an_num(frequence, temps, signal, n)
       //Corps de la fonction
   endfunction
   ```

   Pour ces calculs on utilisera la fonction *inttrap(t,U)*, qui calcule l'intégrale du signal U sur l'intervalle de temps t, par la méthode des trapèzes.
2. Dans les sous-figures 2 et 3 tracer les histogrammes des coefficients a_n et respectivement b_n pour $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$. On utilisera la fonction "bar(y,[largeur,["couleur"]])" où "y" est un vecteur, largeur (paramètre optionnel) est un nombre positif qui permet de choisir l'épaisseur des barres (un pourcentage de l'épaisseur maximum autorisée pour une barre) ; par défaut : épaisseur=0.8, i.e. 80%. Enfin, "couleur" (paramètre optionnel) spécifie la couleur de l'intérieur des barres (par défaut : 'blue').
3. Comparer les valeurs des coefficients a_n et b_n ? Qu'en déduisez vous ?

4. Quelle est l'amplitude du fondamental ? Celle du premier harmonique ?

5. Tracer sur la sous-figure 4 l'allure temporelle du fondamental su signal $u(t)$ ainsi que du premier harmonique non nul. Comparez notamment l'amplitude du fondamental à la valeur maximale du signal $u(t)$. Combien vaut la valeur efficace du signal $u(t)$ (U_{eff}) ? Celle du fondamental ($U_{1_{eff}}$) ?

1. N'oubliez pas de faire des sauvegardes régulières de vos scripts sur une clé USB personnelle.

6. Un paramètre important en ingénierie électrique pour quantifier la qualité d'un signal est le **taux de distorsion harmonique (THD**. Le THD, exprimé en pourcentage, est calculé de la manière suivante :

$$THD = 100 \times \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - U_{1_{eff}}^2}}{U_{1_{eff}}} \tag{5}$$

Calculer à l'aide de Scilab la valeur du THD d'un signal carré.

7. Le développement en série de Fourier du signal $u(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$u(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\sin((2i+1)\omega t)}{(2i+1)} \tag{6}$$

Notez que les harmoniques du signal $u(t)$ sont impaires !

Écrire à l'aide de cette formule les fonctions `an_theo` et `bn_theo` permettant de calculer les coefficients de Fourier théoriques pour un signal carré impair. Quels arguments choisir pour ces fonctions ?

8. Calculer les valeurs des coefficients de Fourier théoriques pour les 10 premiers harmoniques.

9. Comparer les valeurs des amplitudes des 10 premières composantes obtenues numériquement (questions 1.) à celles issues des calculs théoriques (question 7.). Vous pouvez, par exemple, tracer dans la sous-figure `5` l'histogramme de l'erreur relative entre la valeur numérique et la valeur théorique des coefficents b_n. À quoi ces erreurs sont-elles dues ?

2.3 Reconstruction du signal à l'aide de la série de Fourier

1. Avec Scilab, programmer une fonction appelée *fourier* qui renvoie le signal reconstruit à partir de ses coefficients de Fourier. La fonction prendra en argument le temps, la fréquence, et les vecteurs de coefficients a_n et b_n.

```
function urecon = fourier(frequence, temps, an, bn)
    //Corps de la fonction
endfunction
```

2. Réfléchir au corps de la fonction. On pourra par exemple utiliser la fonction *sum*() pour sommer les n composantes du signal.

3. Calculer le signal reconstitué en utilisant les coefficients de Fourier théoriques calculés à la question 7. pour $n = 10$ harmoniques. Tracer ce signal reconstitué dans la sous-figure `6`. Comparer visuellement le graphiques obtenu au signal initial $u(t)$. Que remarquez-vous ?