IUT GEII Nîmes

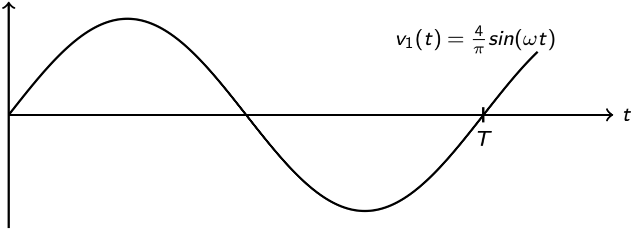
DUT 2 - Alternance
Représentation fréquentielle - Séries de Fourier

Yaël Thiaux
yael.thiaux@iut-nimes.fr

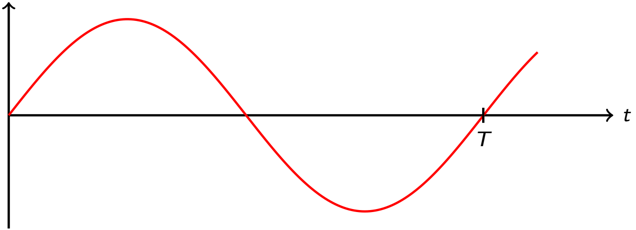
Janvier 2015

Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

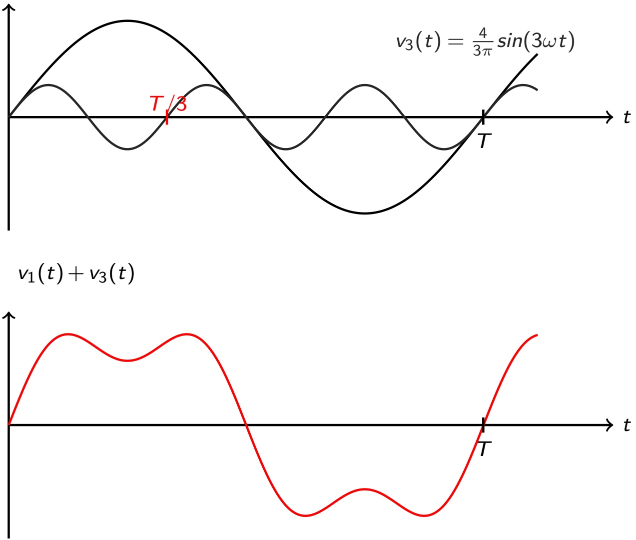


$v_1(t)$



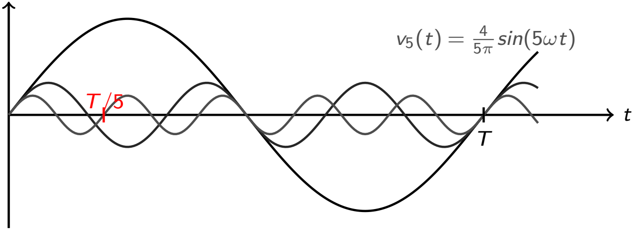
Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

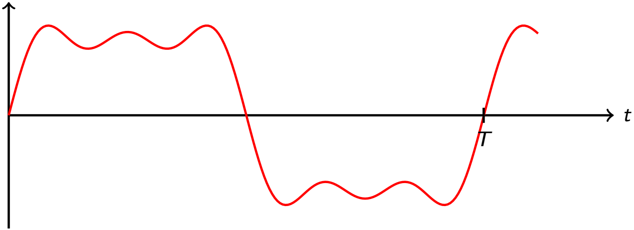


Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

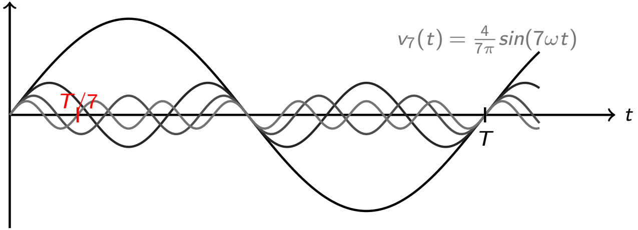


$v_1(t) + v_3(t) + v_5(t)$

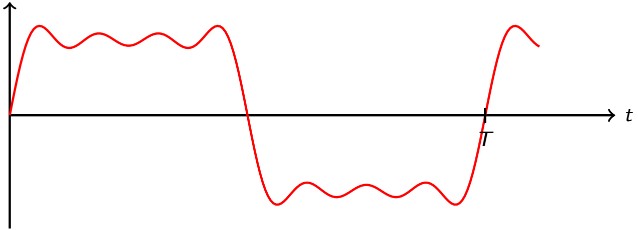


Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

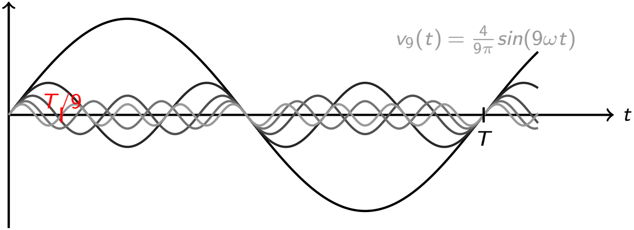


$v_1(t) + v_3(t) + v_5(t) + v_7(t)$

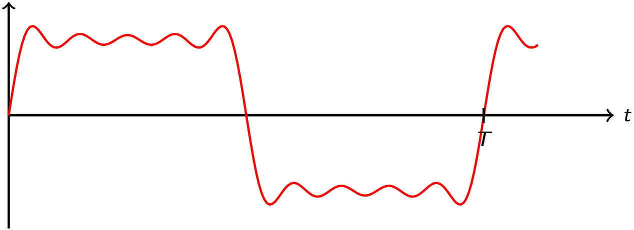


Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

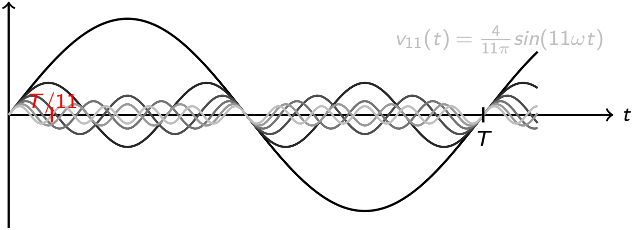


$v_1(t) + v_3(t) + v_5(t) + v_7(t) + v_9(t)$

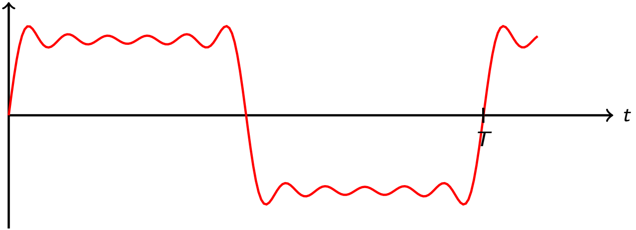


Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

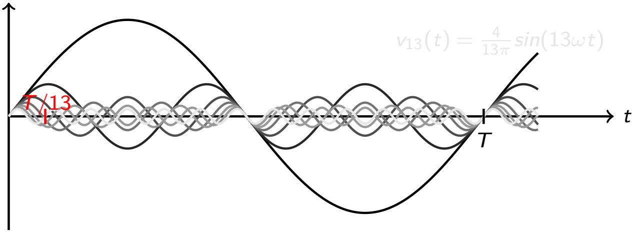


$v_1(t) + v_3(t) + v_5(t) + v_7(t) + v_9(t) + v_{11}(t)$

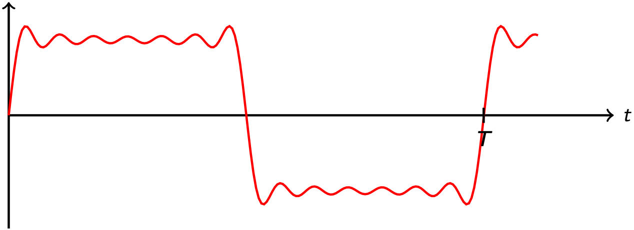


Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?



$$v_1(t) + v_3(t) + v_5(t) + v_7(t) + v_9(t) + v_{11}(t) + v_{13}(t)$$



Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

Un signal carré (de valeur efficace V) est donc la somme d'une infinité de sinusoïdes :

$$
\begin{aligned}
v(t) = {} & \frac{4 \times V}{\pi} sin(\omega t) + \frac{4 \times V}{3\pi} sin(3\omega t) \\
& + \frac{4 \times V}{5\pi} sin(5\omega t) + \frac{4 \times V}{7\pi} sin(7\omega t) \\
& + \frac{4 \times V}{9\pi} sin(9\omega t) + \frac{4 \times V}{11\pi} sin(11\omega t) \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

Un signal carré (de valeur efficace V) est donc la somme d'une infinité de sinusoïdes :

$$\begin{aligned} v(t) = & \frac{4 \times V}{\pi} sin(\omega t) + \frac{4 \times V}{3\pi} sin(3\omega t) \\ & + \frac{4 \times V}{5\pi} sin(5\omega t) + \frac{4 \times V}{7\pi} sin(7\omega t) \\ & + \frac{4 \times V}{9\pi} sin(9\omega t) + \frac{4 \times V}{11\pi} sin(11\omega t) \\ & \ldots \end{aligned}$$

Le signal carré peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \times V}{(2 \times n + 1) \times \pi} sin((2 \times n + 1)\omega t)$$

Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

Un signal carré (de valeur efficace V) est donc la somme d'une infinité de sinusoïdes :

$$
\begin{aligned}
v(t) = {} & \frac{4\times V}{\pi} sin(\omega t) + \frac{4\times V}{3\pi} sin(3\omega t) \\
& + \frac{4\times V}{5\pi} sin(5\omega t) + \frac{4\times V}{7\pi} sin(7\omega t) \\
& + \frac{4\times V}{9\pi} sin(9\omega t) + \frac{4\times V}{11\pi} sin(11\omega t) \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Le signal carré peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\times V}{(2\times n+1)\times\pi} sin((2\times n+1)\omega t)$$

$\Rightarrow$ Tout signal $x(t)$ périodique peut être exprimé sous la forme d'une somme de sinus et de cosinus :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)]$$

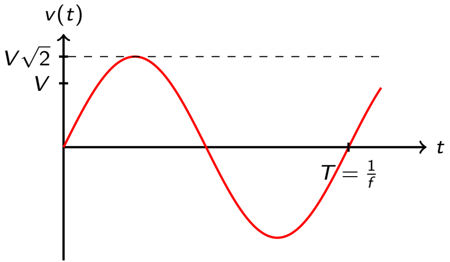
On parle alors de **séries de Fourier**

Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

Un signal sinusoïdal ($v(t) = V\sqrt{2}sin(\omega t)$) peut être représenté de 2 façons :

1. Représentation temporelle :



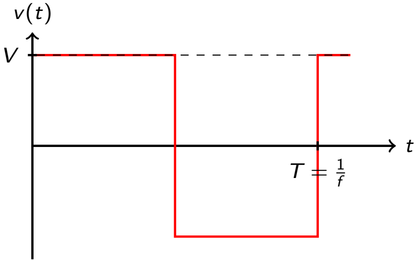
2. Représentation fréquentielle ⇒ Spectre en fréquence

Le signal carré

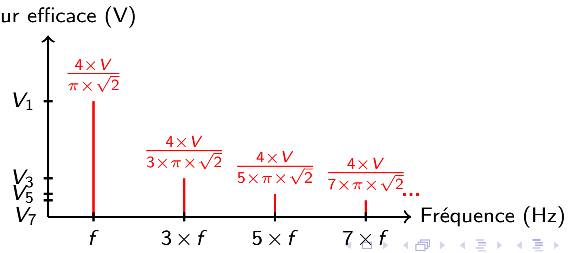
Une somme de sinusoïdes ?

Le signal carré étant composé d'une infinité de sinusoïdes, voici ses représentations possibles :

1. Représentation temporelle :

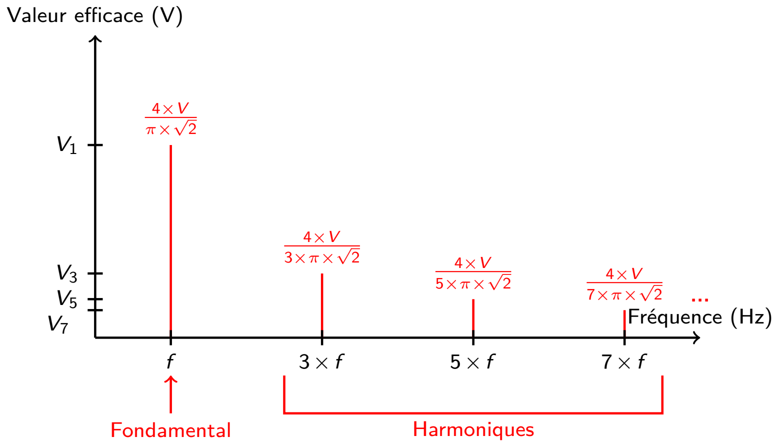


2. Représentation fréquentielle ⇒ Spectre en fréquence



Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?



Calcul des coefficients de Fourier

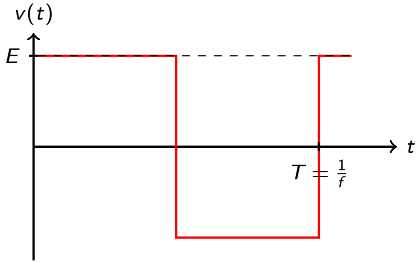
Nous avons vu que tout signal périodique $x(t)$ peut être exprimé sous la forme suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \times cos(n\omega t) + b_n \times sin(n\omega t)]$$

Les coefficients sont calculés de la manière suivante :

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$: valeur moyenne
- $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \times cos(n\omega t)dt$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \times sin(n\omega t)dt$

Exercice : Calculer les coefficients de Fourier du signal ci-dessous



Pour E=3V, calculer les amplitudes des 3 premières composantes de ce signal et représenter les sur un graphe.

Calcul des coefficients de Fourier

Solution :

- Valeur moyenne :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} Edt + \int_{\frac{T}{2}}^T -Edt)$$

$$a_0 = \frac{E}{T}([t]_0^{\frac{T}{2}} - [t]_{\frac{T}{2}}^{T}) = \frac{E}{T}(\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2}) = 0$$

- Coefficients a_n :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \times cos(n\omega t)dt$$

$$a_n = \frac{2\times E}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} cos(n\omega t)dt - \int_{\frac{T}{2}}^T cos(n\omega t)dt)$$

$$a_n = \frac{2\times V}{T}(\frac{1}{n\times\omega}[sin(n\omega t)]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{n\times\omega}[sin(n\omega t)]_{\frac{T}{2}}^{T})$$

$$a_n = \frac{2\times V}{n\times\omega\times T}(sin(\frac{n\omega T}{2}) - sin(0) - sin(n\omega T) + sin(\frac{n\omega T}{2})) = 0!$$

Calcul des coefficients de Fourier

Solution :

- Coefficients b_n :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \times sin(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2 \times V}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} sin(n\omega t)dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T} sin(n\omega t)dt)$$

$$b_n = \frac{2 \times V}{T}(\frac{1}{n \times \omega}[-cos(n\omega t)]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{n \times \omega}[-cos(n\omega t)]_{\frac{T}{2}}^{T})$$

$$b_n = \frac{2 \times V}{n \times \omega \times T}(-cos(\frac{n\omega T}{2}) + cos(0) + cos(n\omega t) - cos(\frac{n\omega T}{2}))$$

$$b_n = \frac{2 \times V}{n \times \omega \times T}(-cos(\frac{n\omega T}{2}) + 1 + 1 - cos(\frac{n\omega T}{2}))$$

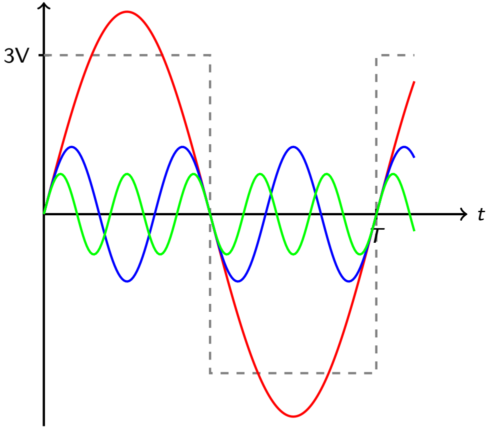
Les coefficients b_n seront non nuls uniquement pour les valeurs impaires de n...

$$b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \times V}{(2 \times k + 1) \times \pi}$$

Calcul des coefficients de Fourier

Solution :

- Amplitudes des 3 premières composantes du signal (n=1, n=3 et n=5) :
  - $b_1 = \frac{4\times 3}{\pi} = 3,82V$
  - $b_3 = \frac{4\times 3}{3\times \pi} = 1,27V$
  - $b_5 = \frac{4\times 3}{5\times \pi} = 0,76V$



Le signal carré

Une somme de sinusoïdes ?

Le **Taux de Distorsion Harmonique** (TDH ou THD) quantifie la part des harmoniques dans le signal, il est calculé (en %) de la manière suivante :

$$TDH = 100 \times \sqrt{\frac{V^2 - V_1^2}{V_1^2}}$$

Avec :

- V : valeur efficace du signal
- V_1 : valeur efficace du fondamental

Exercice

Calculer les TDH des signaux suivants :

- signal sinusoïdal
- signal carré de valeur efficace 3V

Le signal carré

Solution :

- Signal sinusoïdal : un signal sinusoïdal n'étant composé que d'un fondamental, la valeur efficace du fondamental est égale à la valeur efficace du signal.

$$TDH = 0\% \tag{1}$$

- Signal carré de valeur efficace 4V : nous déterminons l'amplitude du fondamental de ce signal à l'aide de la série de Fourier calculée précédemment.

$$b_1 = \frac{4 \times 3}{\pi} = 3,82V$$

  La valeur efficace de ce fondamental peut donc être déterminé :

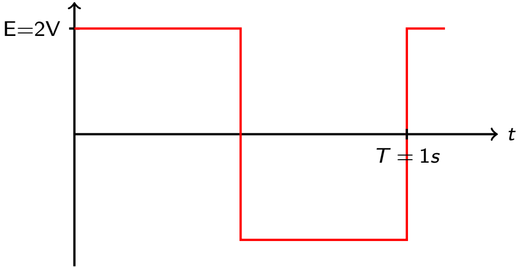
$$V_1 = \frac{b1}{\sqrt{2}} = 2,7V$$

  Le TDH vaut donc (**et ce quelque soit le signal carré !**) :

$$TDH = 100 \times \sqrt{\frac{3^2 - 2,7^2}{2,7^2}} = 48\%$$

Reconstruction d'un signal carré à l'aide du logiciel SCILAB

On souhaite reconstruire le signal ci-dessous à l'aide de la décomposition en série de Fourier du signal carré vue dans la partie théorique :



- Ouvrir Scilab et démarrer l'éditeur de texte Scinotes (en haut à gauche des icônes)
- Déclarer les constantes de notre signal (E et T)
- Déclarer le vecteur temps : ce vecteur temps aura pour valeur minimale 0, pour valeur maximale T et on fxera un pas de temps égal à 1 ms. [1]
- Pour commencer, essayer d'afficher le fondamental du signal carré : sinusoïde d'amplitude $\frac{4 \times E}{\pi}$ et de période T. Pour cela, vous devrez calculer les valeurs de ce fondamental pour l'ensemble des points du vecteur temps puis afficher ce fondamental en fonction du temps. [2]

1. On pourra s'aider de la fonction *linspace()*
2. La fonction *plot(x,y)* permet de tracer la courbe y=f(x)

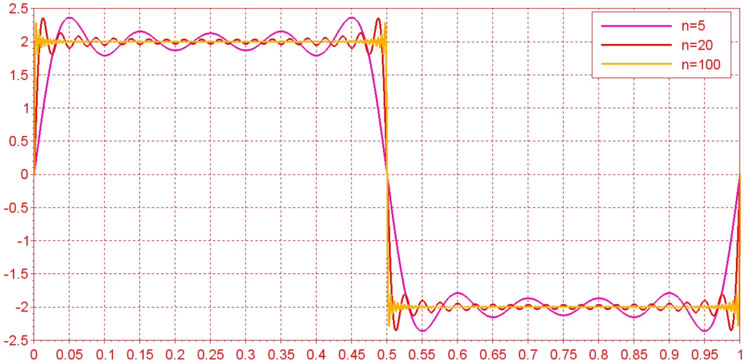
Reconstruction d'un signal carré à l'aide du logiciel SCILAB

- Calculer maintenant les valeurs du premier harmonique de ce signal : sinusoïde d'amplitude $\frac{4 \times E}{3 \times \pi}$ et de période $\frac{T}{3}$.
- Afficher alors la somme du fondamental et du premier harmonique.
- Nous pourrions calculer un à un chacun des harmoniques de ce signal puis les sommer et afficher cette somme mais le plus simple est de créer une fonction qui fera le travail à notre place...Une fonction sous Scilab se déclare de la manière suivante (exemple d'une fonction sommant 2 paramètres d'entrée) :

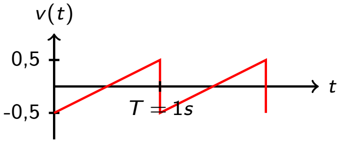
  function sortie=nom-fonction(entree1, entree2)
  sortie= entree1 + entree2
  endfunction
- Créer une fonction permettant de renvoyer un signal carré avec **n** composantes.
- Faites appel à cette fonction et afficher le signal carré composé de 5, 20 et 100 composantes.

Reconstruction d'un signal carré à l'aide du logiciel SCILAB

Résultat :



S'il vous reste du temps, faites en de même pour le signal suivant :



$$v(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times \pi} sin(n\omega t)$$

Travaux pratiques

Spectre d'un signal sinusoïdal

- Ouvrir l'oscilloscope sur PC (PicoScope6)
- A l'aide du GBF, envoyer sur la voie A un signal sinusoïdal d'amplitude 4 V, de valeur moyenne nulle et de fréquence 100 Hz.
- Sélectionner le mode de spectre à l'aide de symbole en haut à gauche de votre fenêtre.
- Dans Option de Spectre, sélectionner une échelle linéaire.
- Sélectionner une largeur de spectre adéquate compte tenu de la fréquence du signal envoyé.
- Tracer alors le spectre en fréquence de ce signal.
- Quel est le niveau de tension atteint par la raie à 100 Hz ?
- Existe-t-il des harmoniques ?
- Ajouter une composante continue de 5 V sur votre montage, le spectre en fréquence est-il modifié ?

Travaux pratiques

Spectre d'un signal carré

- A l'aide du GBF, envoyer sur la voie A un signal carré d'amplitude 4 V, de valeur moyenne nulle et de fréquence 100 Hz.
- Sélectionner une largeur de spectre adéquate compte tenu de la fréquence du signal envoyé.
- Tracer alors le spectre en fréquence de ce signal.
- Identifier (fréquence et niveau de tension atteint) le fondamental et les 6 premières harmoniques
- Justifier théoriquement ces résultats.
- Calculer le THD (en %) de ce signal.
- Tracer alors sur votre copie, le spectre en fréquence d'un signal carré d'amplitude 10 V, de valeur moyenne nulle et de fréquence 1500 Hz. Une fois le spectre théorique tracé, validez celui-ci expérimentalement.