IUT GEII Nîmes

DUT 2 - Alternance
Séance d'Automatique n°7

Yaël Thiaux
yael.thiaux@iut-nimes.fr

Mercredi 15 Janvier 2014

Séance n°7

Déroulement de la séance ($6h$)

1. Test ($\sim$ 1h30)
2. Pause ($\sim$ 20 min)
3. Correction test ($\sim$ 30 min)
4. **TP :** Simulation de systèmes du second ordre ($\sim 1h$)
5. Pause ($\sim$ 20 min)
6. **Cours :** Stabilité des systèmes linéaires ($\sim$ 45 min)
7. **TD :** Exercices sur la stabilité ($\sim$ 35 min)
8. **Critère graphique de stabilité** ($\sim$ 20 min)
9. **Bilan séance** ($\sim$ 10 min)

Objectifs de la séance

1. Asseoir ses connaissances sur les systèmes du second ordre
2. Savoir définir la stabilité
3. Savoir déterminer si un système est stable ou non

TP : Simulation de systèmes du second ordre

Dans cette partie, nous utiliserons le logiciel Scilab. Il s'agit d'un logiciel open source de calcul numérique. Il est disponible gratuitement à l'adresse suivante : `http://www.scilab.org/fr`
Nous utiliserons l'éditeur graphique XCOS permettant la simulation de systèmes dynamiques.

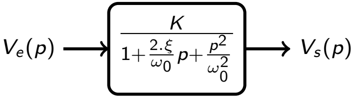
1. Penser à créer un répertoire pour enregistrer tous vos fichiers
2. Ouvrir le logiciel SCILAB (accessible depuis votre bureau)
3. Ouvrir l'éditeur XCOS depuis le menu Applications
4. 2 fenêtres apparaissent alors, la première constitue la zone de dessin où seront dessinés les systèmes à simuler. La seconde (Navigateur de palettes) constitue la bibliothèque où se trouvent les différents blocs. Pour réaliser vos schémas, de plus amples informations sont disponibles dans l'Annexe 2.

TP : Simulation de systèmes du second ordre

Impact du coefficient d'amortissement sur la réponse indicielle

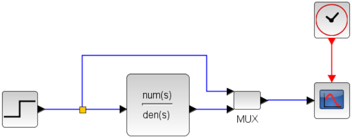
Dans un premier temps nous allons nous intéresser à l'allure générale de la réponse indicielle de $v_s(t)$ en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement ξ. Nous nous trouvons en boucle ouverte. Les valeurs du gain statique et de la pulsation propre sont données :

- $K = 1$
- $\omega_0 = 10\ rad/s$



Système en boucle ouverte

Le schéma XCOS du système en boucle ouverte doit ressembler à celui de la figure ci-dessous :



Simuler le système pour les valeurs suivantes du coefficient d'amortissement :

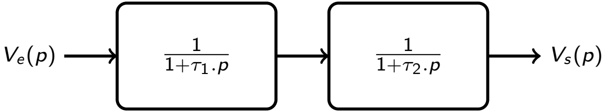
- $\xi = 0,25$
- $\xi = 0,5$
- $\xi = 0,75$
- $\xi = 1$
- $\xi = 1,25$

Pour quelles valeurs de ξ a-t-on un dépassement en sortie ? Combien vaut ce dépassement ?

TP : Simulation de systèmes du second ordre

Régime apériodique

Considérons le système ci-dessous ($\tau_1 = 1\ s$ et $\tau_2 = 0,8\ s$) :

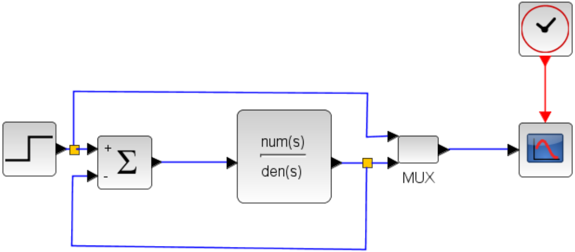


- Identifier de façon théorique les 3 constantes caractéristiques d'un système du second ordre (K, ξ et ω_0)
- Simuler la réponse indicielle du système sous XCOS. Existe-t-il un dépassement de la valeur finale de $v_s(t)$?
- Existe-t-il des différences avec la réponse indicielle d'un système du premier ordre ?
- Reprendre l'exemple précédent avec $\tau_1 = 1\ s$ et $\tau_2 = 0,05\ s$.
- Déterminez graphiquement le temps de réponse du système à 5% près de la valeur en régime permanent. Comparez ce temps de réponse à celui d'un système du premier ordre dont la constante de temps vaut 1 s. Conclure.

TP : Simulation de systèmes du second ordre

Boucle fermée

Réalisez sous XCOS le schéma de la figure ci-dessous. On donne $K = 1$, $\omega_0 = 10\ rad/s$ et $\xi = 0,2$.

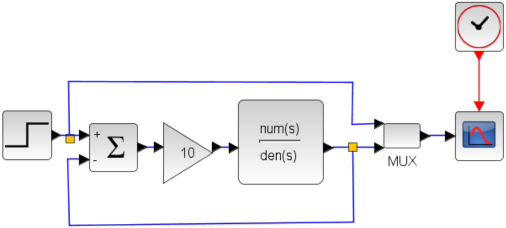


- Comparer sur un même graphique la réponse du système en boucle ouverte et la réponse du système en boucle fermée.
- Conclure sur l'impact de la boucle fermée sur le gain statique, la valeur du premier dépassement et le temps de réponse du système.

TP : Simulation de systèmes du second ordre

Correction proportionnelle

On insère dans la boucle fermée un correcteur proportionnel de fonction de transfert : $C(p) = G$. On donne $K = 1$, $\omega_0 = 10\ rad/s$ et $\xi = 0,2$.



Pour G=1 ;5 puis 10 :

- Simuler la réponse indicielle du système.
- Déterminer le gain statique, la valeur du premier dépassement et le temps de réponse à 5%.
- Conclure sur l'intérêt du correcteur proportionnel.

1 TP : Simulation de systèmes du second ordre

2 Stabilité des systèmes linéaires
- Introduction
- Systèmes du premier ordre
- Systèmes du second ordre
- Systèmes d'ordre supérieur à 2

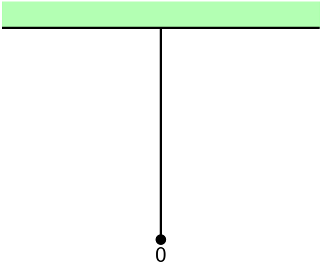
3 TD : Exercice sur la stabilité

4 Critère graphique simple de stabilité d'un système

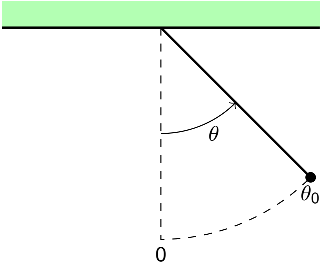
Stabilité ?

Exemple du pendule

Une masse est suspendue au plafond par un fil....

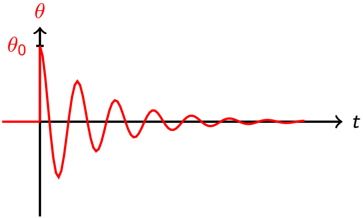


Position de repos



Perturbation...

Réponse du système à cette perturbation :

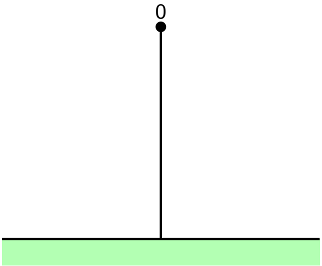


Après perturbation, le système retrouve sa position initiale

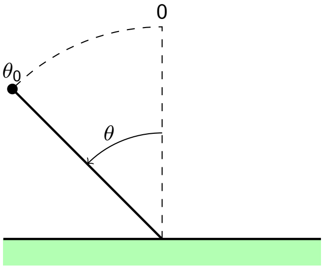
Le système est dit **stable**

Stabilité ?

Contre exemple du pendule inversé

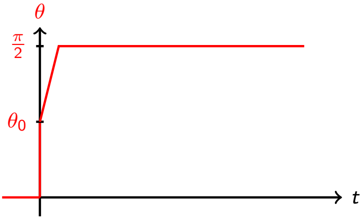


Position de repos



Perturbation...

Réponse du système à cette perturbation :

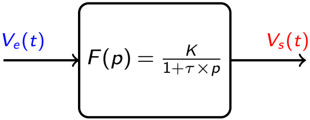


Après perturbation, le système retrouve ne retrouve pas sa position initiale

Le système est dit **instable**

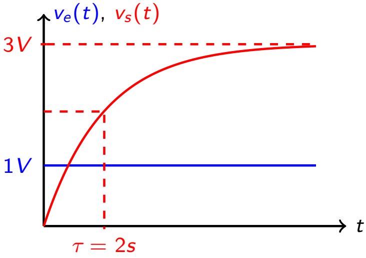
Stabilité des systèmes du premier ordre

Rappels



- τ [s] : constante de temps du système
- K : gain statique du système

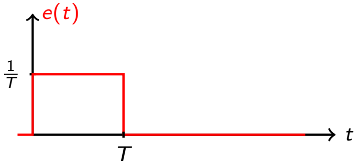
Réponse indicielle du système : $K = 3$ et $\tau = 2$ s



Pour étudier la stabilité de ce système, nous allons étudier sa **réponse à une impulsion en entrée (perturbation)**

Impulsion de Dirac

Considérons un signal impulsionnel $e(t)$:



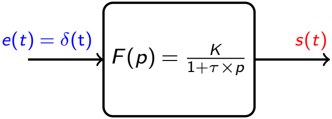
L'impulsion de Dirac est définie de la façon suivante :

$$\delta(t) = lim_{T \to 0} e(t)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Il s'agit donc d'un signal d'une durée nulle et d'une valeur infinie...
Dans la pratique, lorsque $T << \tau$, nous considèrerons qu'il s'agit d'une impulsion de Dirac.

Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre



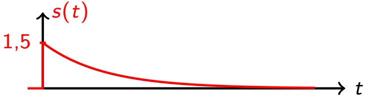
Expression du signal de sortie du système :

$$S(p) = F(p) \times E(p) = F(p) \times 1 = \frac{K}{1+\tau \times p}$$

Hors : $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+a}) = e^{-a \times t}$
D'où :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Réponse impulsionnelle du système :
$K = 3$ et $\tau = 2$ s



Après perturbation, le système retrouve sa position initiale

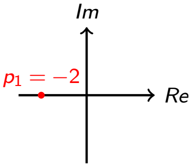
Le système est dit **stable**

Stabilité des systèmes du premier ordre

Pôle de la fonction de transfert

Comme nous l'avons déjà vu, un pôle de la fonction de transfert correspond à une valeur particulière de p qui annule le dénominateur de la fonction de transfert.

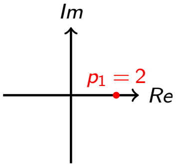
Pôle à partie réelle négative :
$F(p) = \frac{1}{p+2}$



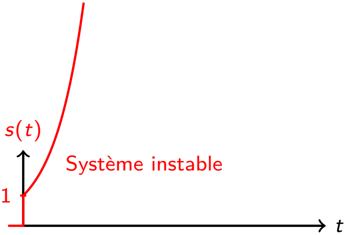
Pôle : $p_1 = -2$
Réponse impulsionnelle :

Système stable

Pôle à partie réelle positive :
$F(p) = \frac{1}{p-2}$



Pôle : $p_1 = 2$
Réponse impulsionnelle :



Stabilité des systèmes du premier ordre

Conclusion

Un système du premier ordre est **stable** si son pôle est **négatif**

Un système du premier ordre est **instable** si son pôle est **positif**

Il suffit donc de connaître les pôles d'une fonction de transfert pour déterminer la stabilité du système !

Remarque

Un pôle positif pour un système du premier ordre implique une constante de temps négative...Les systèmes du premier ordre que vous rencontrerez dans la réalité seront donc toujours stables !

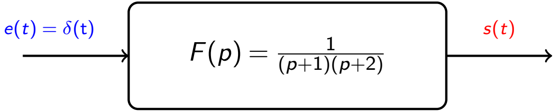
$$\frac{K}{1+\tau\times p} = \frac{\frac{K}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}$$

Pôle négatif : $p_1 = -\frac{1}{\tau} \leftrightarrow$ Constante de temps positive

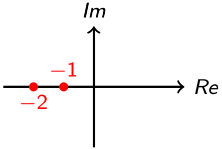
Stabilité des systèmes du second ordre

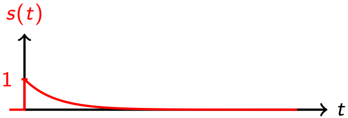
Comme pour un système du premier ordre, il suffit de connaître les pôles de la fonction de transfert pour savoir si le système est stable.

Cas 1 : 2 pôles réels négatifs



Pôles de la fonction de transfert :
Pôles : $p_1 = -1$ et $p_2 = -2$
$S(p) = F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$
Avec $A = -B = 1$
$s(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

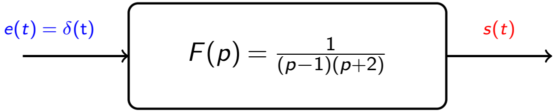




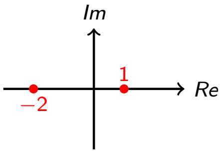
Système stable

Stabilité des systèmes du second ordre

Cas 2 : 1 pôle réel négatif & 1 pôle réel positif



Pôles de la fonction de transfert :
Pôles : $p_1 = 1$ et $p_2 = -2$
$S(p) = F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}$
Avec $A = -B = 1/3$
$s(t) = \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}$



Système instable

Stabilité des systèmes du second ordre

Cas 3 : $0 < \xi < 1$

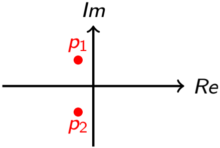
$e(t) = \delta(\mathrm{t}) \longrightarrow \boxed{F(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow s(t)$

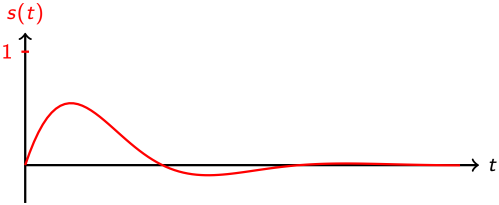
2 pôles complexes conjugués :

$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

$s(t) = \frac{K\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t)$

Ex : $K = 1,\ \xi = 0,5,\ \omega_0 = 1 rad/s$

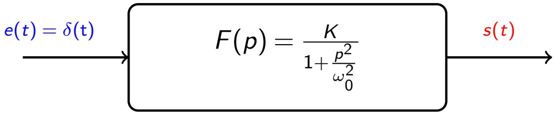




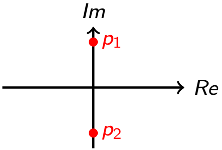
Système stable

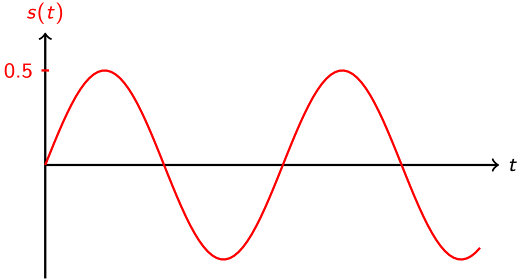
Stabilité des systèmes du second ordre

Cas 4 : $\xi = 0$



2 pôles complexes conjugués :
Ex : $K = 1/4$, $\omega_0 = 2rad/s$
$S(p) = F(p) = \frac{1/4}{1+\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{p^2+4}$
$p_{1,2} = \pm 2j$
$s(t) = 0,5sin(2t)$





Limite de stabilité
Système non amorti !
Oscillateur

Stabilité des systèmes d'ordre supérieur à 2

Critère de Routh

Pour déterminer la stabilité d'un système, il suffit de déterminer ses pôles :

1. Pôles à partie réelle négative $\Rightarrow$ Système stable
2. 1 pôle à partie réelle positive $\Rightarrow$ Système instable
3. Pôles imaginaires purs $\Rightarrow$ Oscillateur

Difficulté pour déterminer les pôles des systèmes d'ordre supérieur à 2 !

Ex : Le système suivant est-il stable ?

$$e(t) \longrightarrow \boxed{F(p) = \frac{1}{p^4+p^3+3\times p^2+p+1}} \longrightarrow s(t)$$

Utilisation du critère de Routh

Stabilité des systèmes d'ordre supérieur à 2

Critère de Routh

On s'intéresse uniquement au dénominateur de F(p) :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3 \times p^2 + p + 1 = a_4 \times p^4 + a_3 \times p^3 + a_2 \times p^2 + a_1 \times p^1 + a_0 \times p^0$

Construction du tableau :

$$\begin{array}{|c|c|c|} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ b_2? & b_0? & 0 \\ c_1? & 0 & 0 \end{array}$$

Calcul des coefficients b_2, b_0 et c_1 :

- $b_2 = \frac{-1}{a_3} \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$
- $b_0 = \frac{-1}{a_3} \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}$
- $c_1 = \frac{-1}{b_2} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}$

Rappel : calcul du déterminant d'une matrice 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Stabilité des systèmes d'ordre supérieur à 2

Critère de Routh

Application :

$D(p) = p^4 + p^3 + 3 \times p^2 + p + 1 = a_4 \times p^4 + a_3 \times p^3 + a_2 \times p^2 + a_1 \times p^1 + a_0 \times p^0$

Construction du tableau :

1	3	$a1$
1	1	0
b_2?	b_0?	0
c_1?	0	0
d_0?	0	0

1. On remplit les 2 premières lignes du tableau
2. Calcul de b_2 : $b_2 = \frac{-1}{a_3}\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$

   $b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$
3. Calcul de b_0 : $b_0 = \frac{-1}{a_3}\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}$

   $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$
4. Calcul de c_1 : $c_1 = \frac{-1}{b_2}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}$

   $c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1/2$
5. Calcul de d_0 : $d_0 = \frac{-1}{c_1}\begin{vmatrix} b_2 & b_0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}$

   $d_0 = \frac{-1}{1/2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1$
6. Étude de la première colonne

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne sont strictement positifs. Donc : **système stable pour cet exemple !**

TD : Exercices sur la stabilité

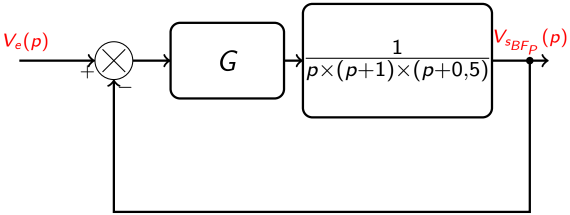
Définir si les systèmes suivants sont stables, vous justifierez votre réponse soit en traçant l'allure de la réponse impulsionnelle de chaque fonction de transfert soit en déterminant les pôles de celles-ci :

1. $F_1(p) = \frac{10}{1+5\times p}$
2. $F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p+4)(p+7)}$
3. $F_3(p) = \frac{5}{1+0,1\times p}$
4. $F_4(p) = \frac{10}{p-2}$
5. $F_5(p) = \frac{2,2}{(1+5\times p)(p+2)(p-0.7)}$
6. $F_6(p) = \frac{3}{1+0,4\times p+p^2}$
7. $F_7(p) = \frac{3}{1+p^2}$
8. $F_8(p) = \frac{3}{2\times p^4+p^3+3\times p^2+p+1}$

Limite de stabilité d'un système

Exemple

Considérons un système $F(p)$ inséré au sein d'un asservissement muni d'un correcteur proportionnel :



⇒ Le but ici est de déterminer dans quelles conditions se système est stable

Détermination de la $FTBF$:

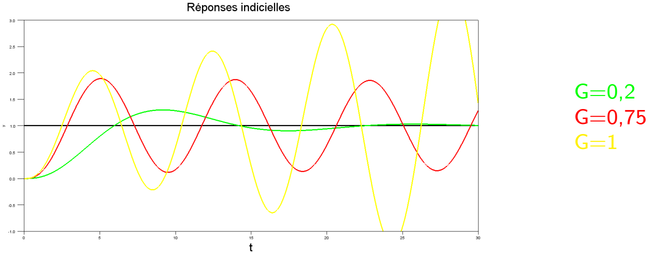
$$FTBF = \frac{V_{s_{BF_P}}}{V_e} = \frac{F(p)}{1+F(p)}$$

$$FTBF = \frac{V_{s_{BF_P}}}{V_e} = \frac{G}{G+p\times(p+1)\times(p+0,5)}$$

Limite de stabilité d'un système

Exemple

Intéressons nous dans un premier temps à la réponse indicielle de ce système en BF. Bien entendu, cette réponse dépendra de la valeur du gain du correcteur proportionnel :



Le système en BF se comporte différemment en fonction de la valeur de G :

1. $G = 0,2 \Rightarrow$ Système stable
2. $G = 0,75 \Rightarrow$ Système juste oscillant
3. $G = 1 \Rightarrow$ Système instable

$\Rightarrow$ Importance du réglage du correcteur !

Limite de stabilité d'un système

Exemple

L'application du critère de Routh va nous permettre de déterminer les limites de stabilité de ce système. Pour cela, intéressons nous au dénominateur de la FTBF :

$$D(p) = G + p \times (p+1) \times (p+0,5) = p^3 + 1,5 \times p^2 + 0,5 \times p + G$$
$$D(p) = a_3 \times p^3 + a_2 \times p^2 + a_1 \times p^1 + a_0 \times p^0$$

$$\begin{vmatrix} a_3 = 1 & a_1 = 0,5 & 0 \\ a_2 = 1,5 & a_0 = G & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1. On remplit les lignes du tableau
2. Calcul de b_1 : $b_1 = \frac{-1}{a_2}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$

   $b_1 = \frac{-1}{1,5}\begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 1,5 & G \end{vmatrix} = \frac{0,75-G}{1,5}$
3. Calcul de c_0 : $c_0 = \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}$

   $c_0 = \frac{-1}{\frac{0,75-G}{1,5}}\begin{vmatrix} 1,5 & G \\ \frac{0,75-G}{1,5} & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{G}$
4. Étude de la première colonne

Limite de stabilité d'un système

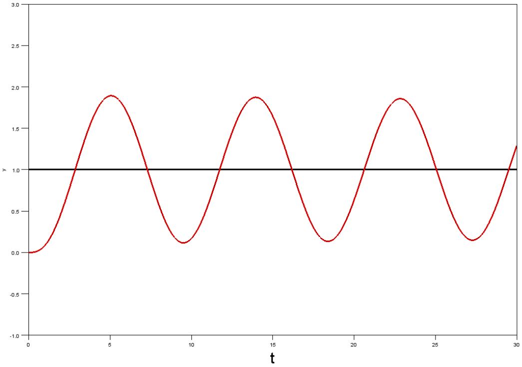
Exemple

Le système est stable si tous les coefficients de la première colonne sont positifs :

1. Condition 1 : $0,75 - G > 0 \Rightarrow G < 0,75$
2. Condition 2 : $G > 0$

Le critère de Routh nous permet donc de déterminer les valeurs acceptables de G tout en assurant la stabilité.

Cas : $G = 0,75$, réponse indicielle



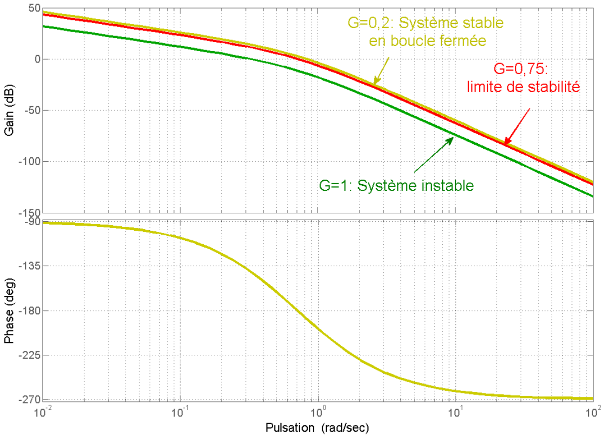
Sortie oscillante : limite de stabilité

⇒ Intérêt d'utiliser des marges de sécurité concernant la stabilité

Limite de stabilité d'un système

Point critique

Intéressons nous au diagramme de Bode de la **FTBO** du système pour les 3 réglages de **G** envisagés :

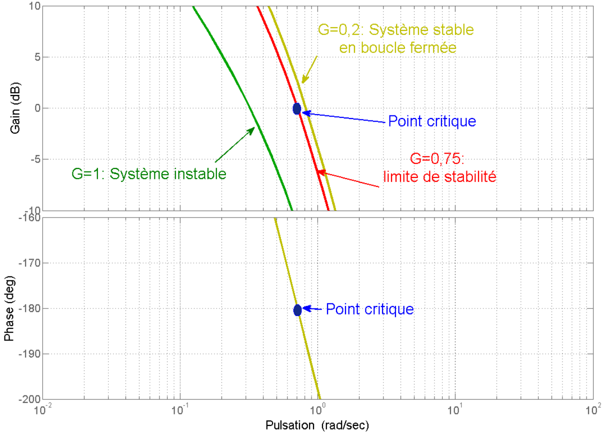


Diagrammes de Bode de la FTBO

Limite de stabilité d'un système

Point critique

Zoom sur les diagrammes de Bode de la **FTBO** :



Le point critique est défini de la façon suivante :

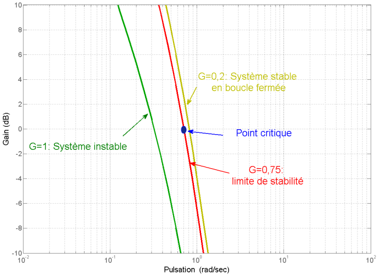
$$|FTBO| = 0dB \quad et \quad \varphi(FTBO) = -180°$$

Limite de stabilité d'un système

Point critique

3 possibilités :

1. **Cas 1** : Si le diagramme de Bode du module de la FTBO (en jaune) passe **au dessus** du point critique, le **système est stable**
2. **Cas 2** : Si le diagramme de Bode du module de la FTBO (en rouge) passe par le point critique, le système est en **limite de stabilité**
3. **Cas 3** : Si le diagramme de Bode du module de la FTBO (en vert) passe **au dessous** du point critique, le **système est instable**



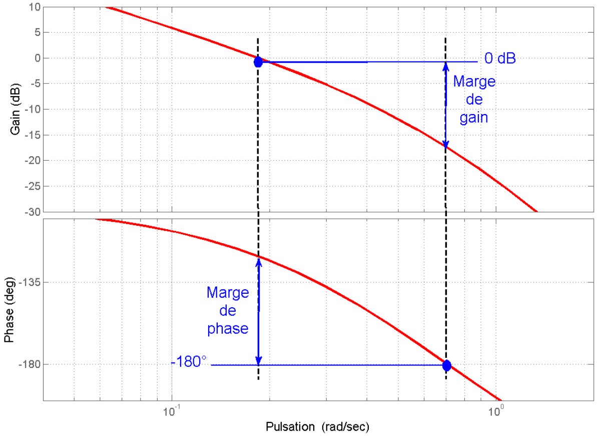
De façon à assurer la stabilité du système, des marges de sécurité sont utilisées :

- **Marge de Gain :** MG
- **Marge de Phase :** $M\varphi$

Limite de stabilité d'un système

Marges de gain et de phase

Visualisation des marges de stabilité sur le diagramme de Bode de la FTBO :



Limite de stabilité d'un système

Marges de gain et de phase

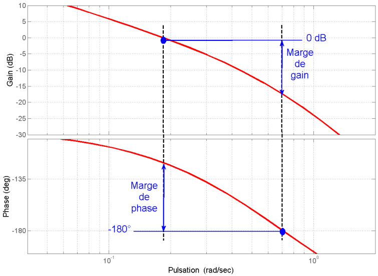
Détermination de la marge de phase :

1. Détermination de la pulsation ω_1 pour laquelle $|FTBO|_{\omega_1} = 0dB$
2. Détermination de la phase de la FTBO pour cette pulsation : $\varphi(FTBO)_{\omega_1}$
3. La marge de phase peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$M\varphi = 180° + \varphi(FTBO)_{\omega_1}$$

Pour l'exemple de la diapositive précédente, cela donne :

1. $\omega_1 = 0,18\ rad/s$
2. $\varphi(FTBO)_{\omega_1} = -120°$
3. $M\varphi = 180° + \varphi(FTBO)_{\omega_1} = 60°$



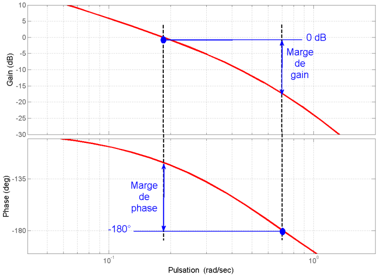
Limite de stabilité d'un système

Marges de gain et de phase

Détermination de la marge de gain :

1. Détermination de la pulsation ω_2 pour laquelle $\varphi(FTBO)_{\omega_2} = -180°$
2. Détermination du gain de la FTBO pour cette pulsation : $|FTBO|_{\omega_2}$
3. La marge de gain peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$MG = -|FTBO|_{\omega_2}$$



Pour l'exemple de la diapositive précédente, cela donne :

1. $\omega_2 = 0,7\ rad/s$
2. $|FTBO|_{\omega_2} = -17\ dB$
3. $MG = 17\ dB$

Limite de stabilité d'un système

Marges de gain et de phase

Dans la pratique, les valeurs usuellement utilisées pour ces marges de sécurité sont les suivantes :

1. $M\varphi \sim 45°$
2. $MG \sim 10dB$

La méthode est donc inverse, il faut déterminer la valeur du gain G pour obtenir ces marges de sécurité !

A retenir

Le **gain G** est **inversement proportionnel aux marges de sécurité**...
Le **correcteur proportionnel** a donc un effet **déstabilisant** !