Cours AQ 5

Réponse harmonique des circuits du 2^{nd} ordre

Règles de base

- Soit un circuit du premier ordre admettant une fonction de transfert:

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

- Pour l’étude en fréquence on remplace:
- P ➔ jω Alors, si $\omega_0 = 1/\tau = 2\pi f_c$

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Rappels: module et arguments

$$F(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\left|F(j\omega)\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$Arg\left[F(j\omega)\right] = arctg\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

cas particulier

$$Arg\left[j\omega\right] = arctg\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg\,\frac{\omega}{0} = Arctg(\infty) = \pi/2$$

Rappels: module et arguments

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\left|F(j\omega)\right| = \frac{k}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$Arg\left[F(j\omega)\right] = -arctg\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = -arctg\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

Cas particulier

$$Arg\left[{}^{1}\!/_{j\omega}\right] = -arctg\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = -arctg\,\frac{\omega}{0} = -\pi/2$$

Diagramme de Bode: Module et phase sur deux diagrammes séparés

- Premier ordre:

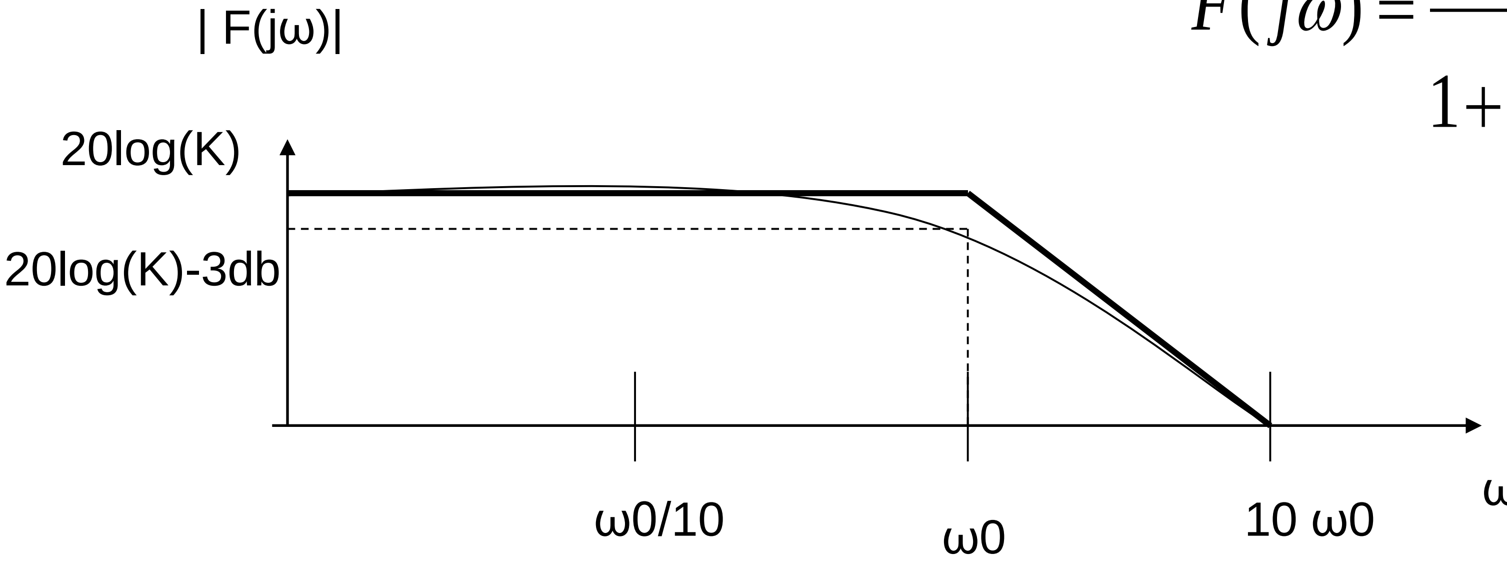
$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

- A la pulsation de coupure le gain est diminué de 3db
- Le déphasage est de -π/4
- Au-delà la pente est de -20 db par décade
- Le déphasage tend vers -π/2

Méthode de tracé rapide pour le module

1. On place ω_0, ω_0 /10 et $10\omega_0$
2. Pour ω_0 /10 On place le gain 20log (k)
3. Pour ω0 |F |= 20log(K)-3db
4. Pour $10\omega_0$ on place la pente de -20 db

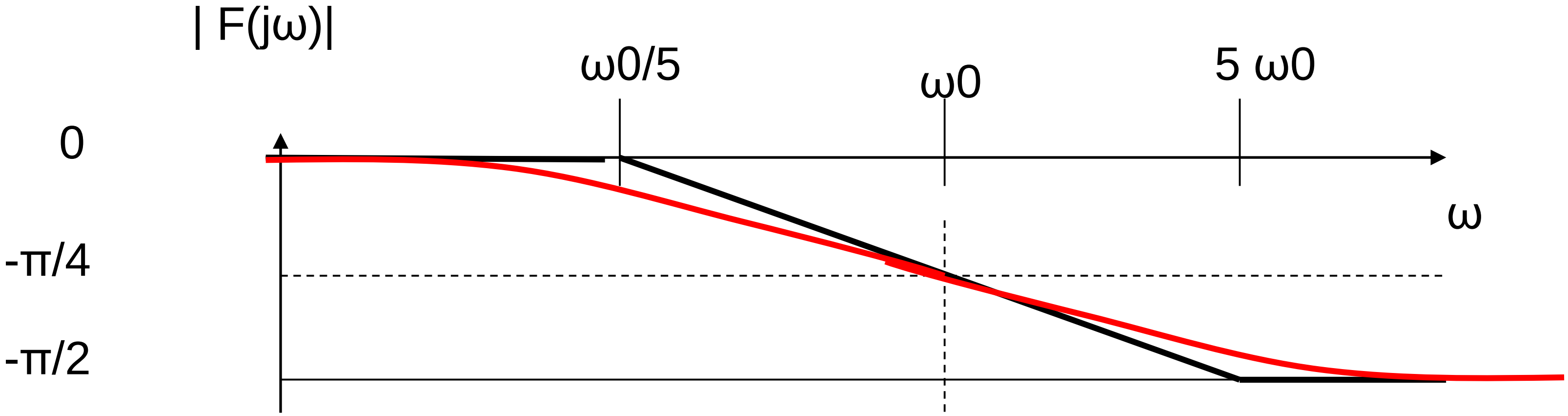
$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$



Méthode de tracé rapide pour la phase

$$F(j\omega)=\frac{k}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

1. On place ω_0, ω_0 /5 et $5\omega_0$
2. Pour ω_0 /5 aucun déphasage
3. Pour ω_0 on place un déphasage de $-\pi/4$
4. Pour $5\omega_0$ on place un déphasage de $-\pi/2$



Systèmes du 2nd ordre

$$F(p) = \frac{K}{1 + 2z\,\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Trois cas possibles en fonction de z

Dans tous les cas Factoriser
Surtout NE PAS DEVELOPPER!!!

Cas où z=1

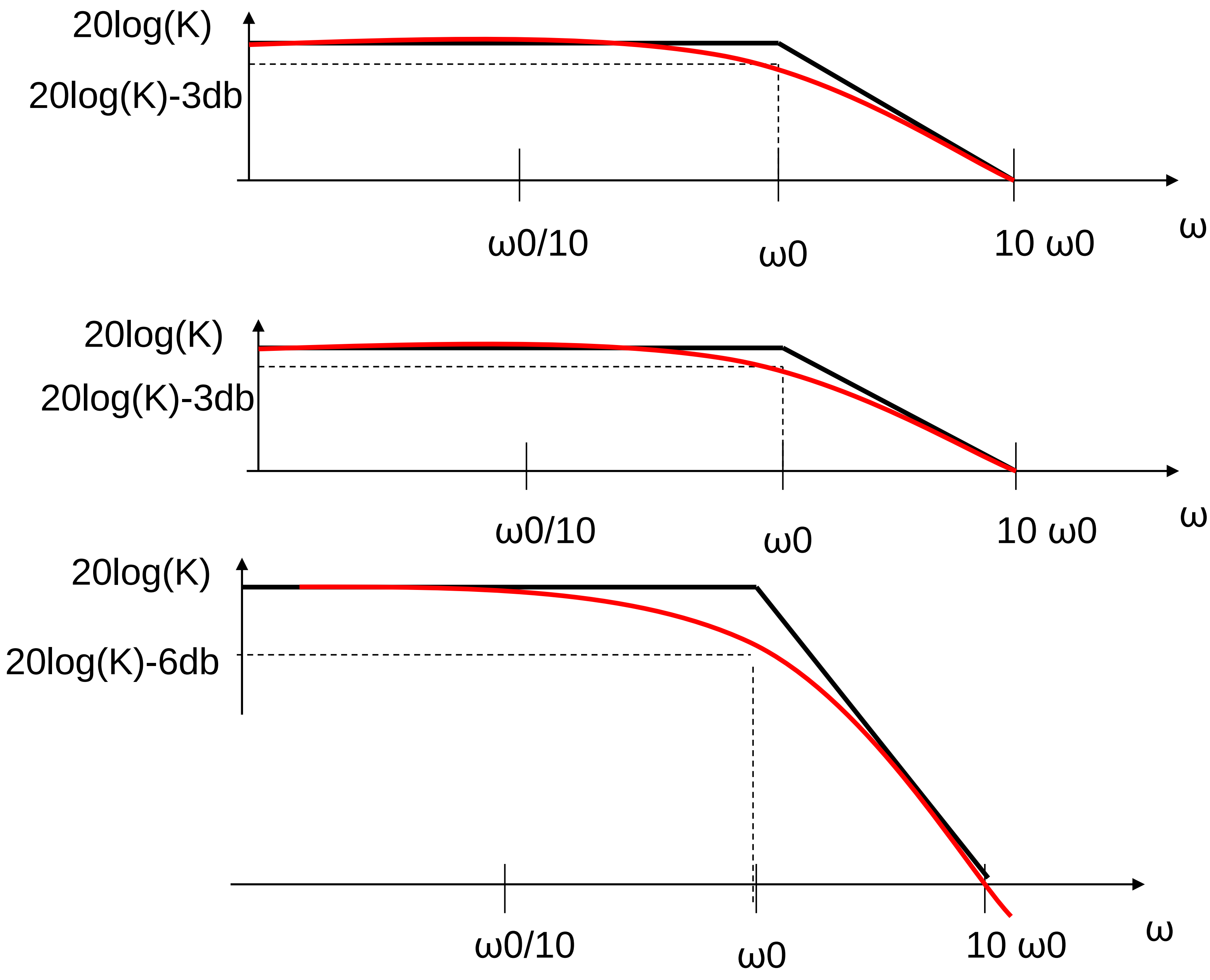
1 pole double

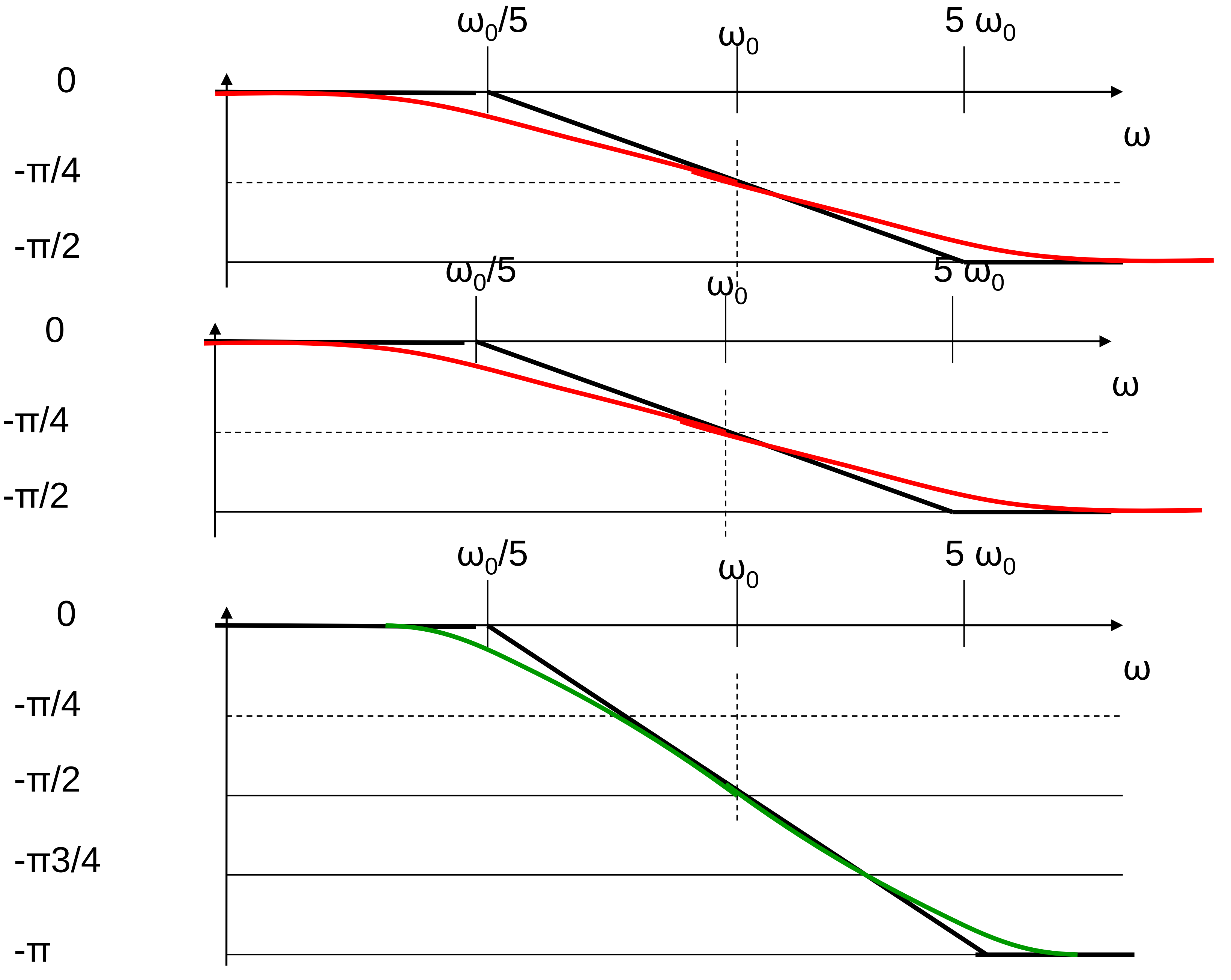
$$F(p) = \frac{K}{1 + 2z\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On remplace p par jω

$$F = \frac{K}{1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Le système se comporte comme deux filtres du 1^{er} ordre identiques en cascade


20log(K)
20log(K)-3db
ω0/10
ω0
10 ω0
ω
20log(K)
20log(K)-3db
ω0/10
ω0
10 ω0
ω
20log(K)
20log(K)-6db
ω0/10
ω0
10 ω0
ω


$\omega_0/5$
ω_0
$5\ \omega_0$
0
ω
$-\pi/4$
$-\pi/2$
$\omega_0/5$
ω_0
$5\ \omega_0$
0
ω
$-\pi/4$
$-\pi/2$
$\omega_0/5$
ω_0
$5\ \omega_0$
0
ω
$-\pi/4$
$-\pi/2$
$-\pi 3/4$
$-\pi$

Cas z>1

$$F = \frac{K}{1 + \frac{2zp}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$ *Admet deux poles simples*

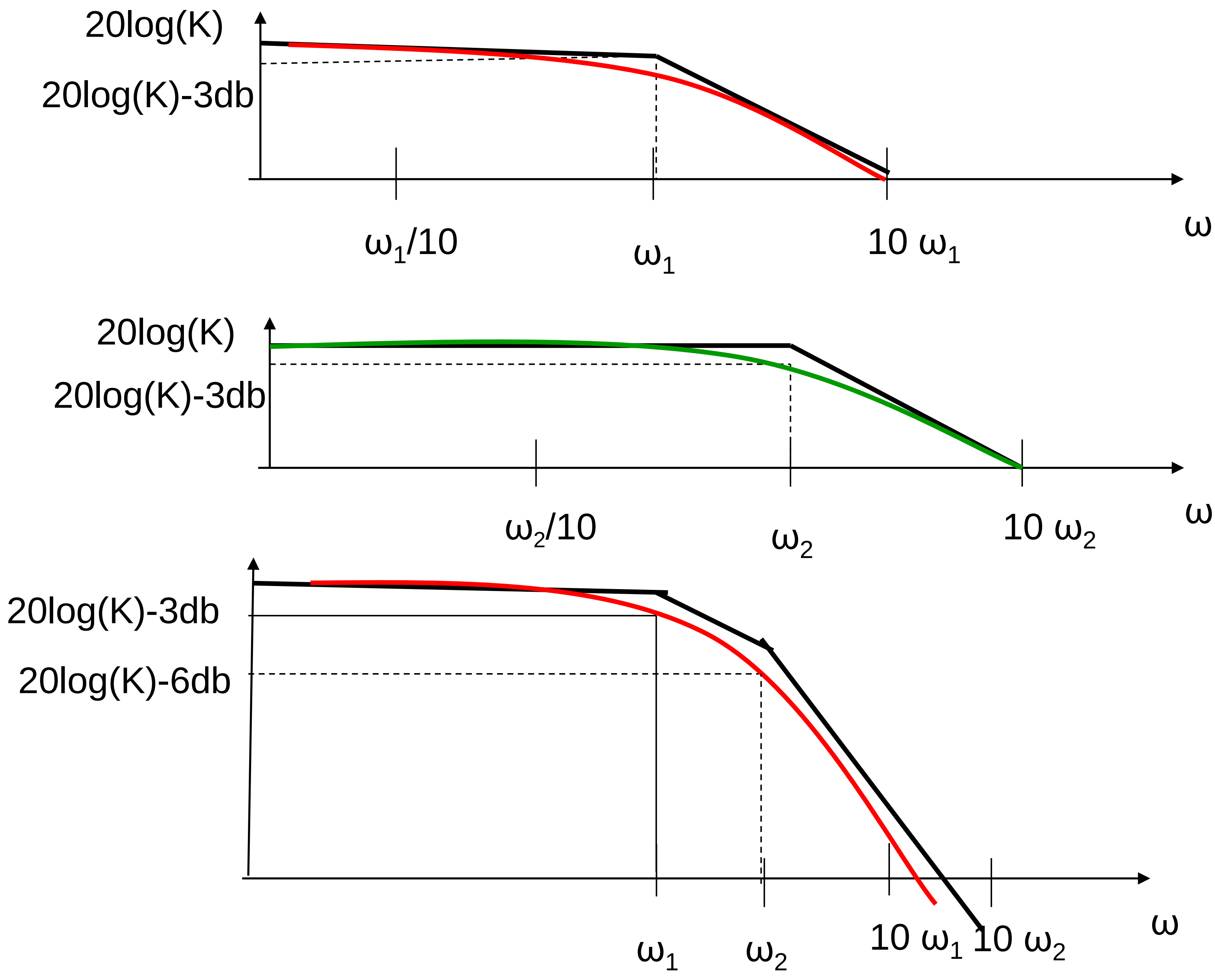
On calcule les poles et on factorise

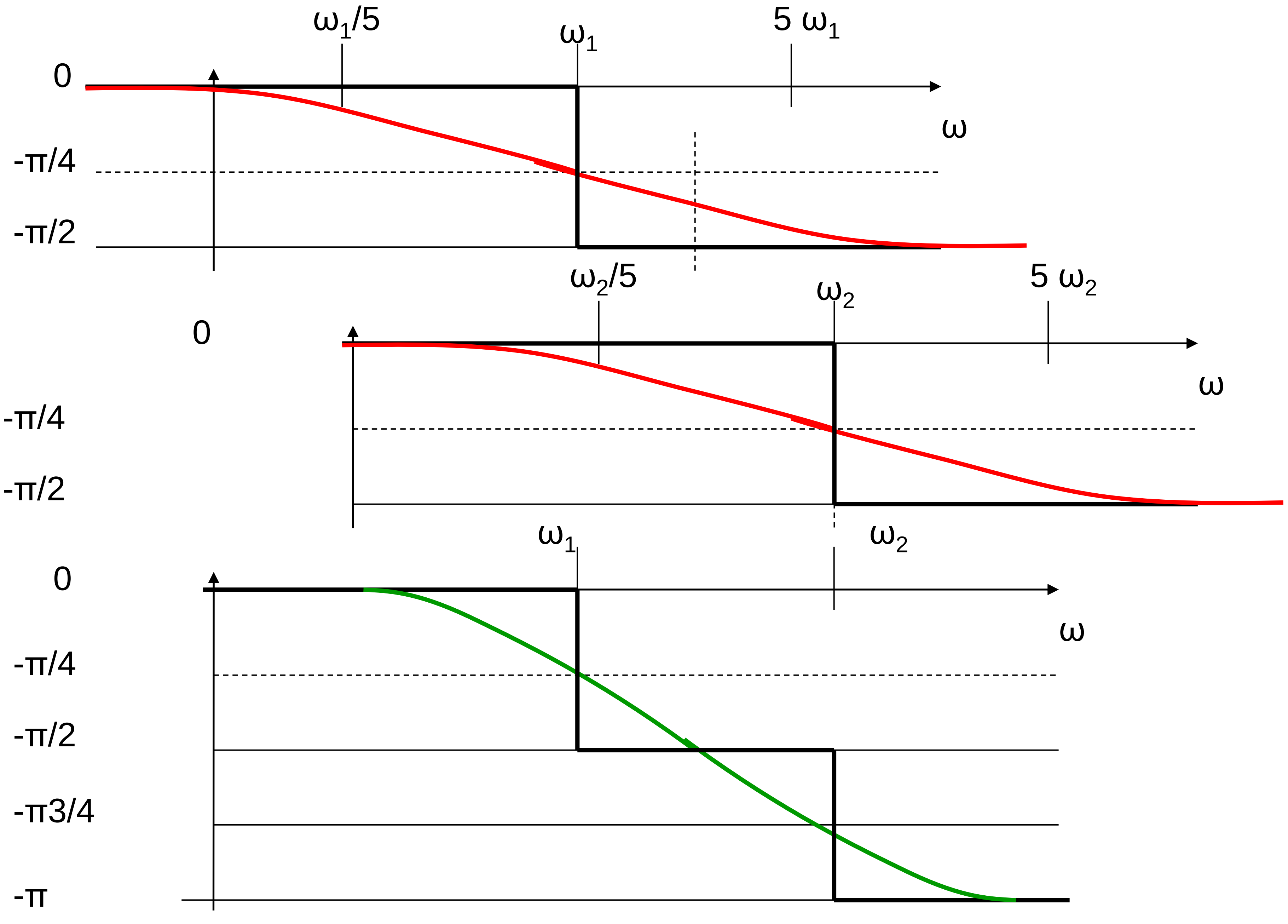
$$F = \frac{K}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$$

Avec

$$\omega_1 = \omega_0(z - \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\omega_2 = \omega_0(z + \sqrt{z^2 - 1})$$


20log(K)
20log(K)-3db
ω1/10
ω1
10 ω1
ω
20log(K)
20log(K)-3db
ω2/10
ω2
10 ω2
ω
20log(K)-3db
20log(K)-6db
ω1
ω2
10 ω1
10 ω2
ω



ω1/5
ω1
5 ω1
0
ω
-π/4
-π/2
ω2/5
ω2
5 ω2
0
ω
-π/4
-π/2
ω1
ω2
0
ω
-π/4
-π/2
-π3/4
-π

Cas z <1

$$F=\frac{K}{1+\frac{2zp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \textit{Admet deux poles complexes conjugués}$$

$$F=\frac{K}{1+2jzu-u^2}=\frac{K}{(1-u^2)+2jzu}$$

- On pose $u=\omega/\omega_0$

$$|F|=\left|\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2zu)^2}}\right|$$

Pulsation de résonance

$$\left|F\right| = \left|\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2zu)^2}}\right.$$

$$\left|F\right| \max si \;\; son\ dénominateur\ H\ est\ minimum$$

$$H = (1-u^2)^2+(2zu)^2\ est \min si \;\; H'\ s'annule$$

$$H'\ est\ nul\ \ pour$$

$$u = \sqrt{1-2z^2}$$

$$soit$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$$

ω_r N’existe que si 1-2z² est positif soit z < 0,707

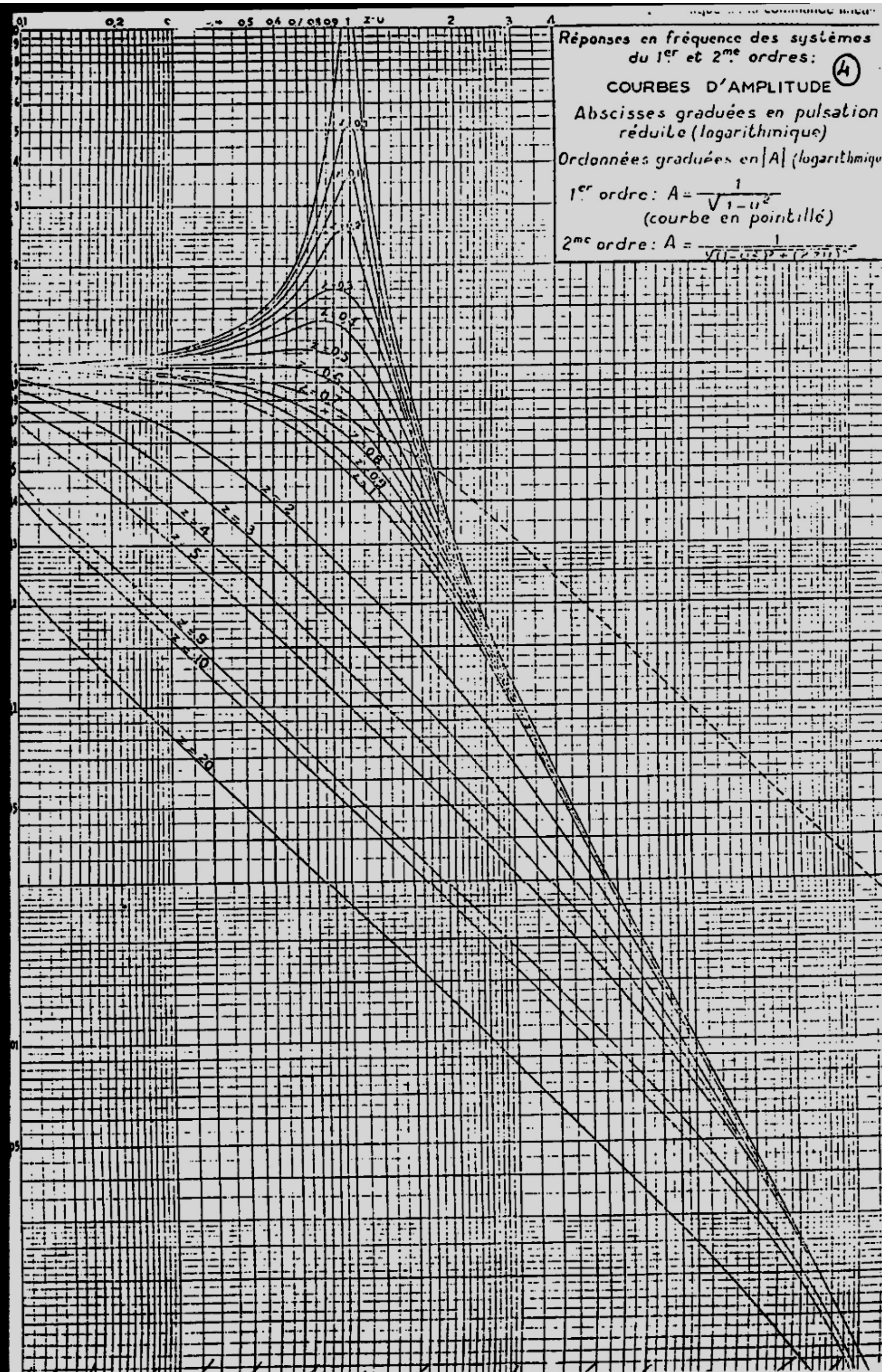
Module à la pulsation de résonance

- En remplaçant dans

$$|F| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}}$$

- Il vient:

$$|F(j\omega_R)| = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$$



Réponses en fréquence des systèmes
du 1er et 2me ordres:
4
COURBES D'AMPLITUDE
Abscisses graduées en pulsation
réduite (logarithmique)
Ordonnées graduées en |A| (logarithmiqu
1er ordre : A = 1/√(1-u²)
(courbe en pointillé)
2me ordre : A = 1/√((1-u²)² + (2zu)²)
z = 2
z = 3
z = 4
z = 5
z = 9
z = 10
z = 20

Identification

1. Sur le diagramme de Bode on mesure:

$$\left|F(j\omega_R)\right| = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

2. On détermine z
3. On mesure $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$
4. On connait déjà z. On en déduit ωo