TP 4 Echantillonnage d'un signal

1- Repliement de spectre - Théorème de Nyquist-Shannon

Le traitement d'un signal analogique continu du temps (issu d'un capteur, par exemple) par un microprocesseur nécessite que le signal soit d'abord converti en valeurs numériques. Cette étape s'appelle la conversion analogique-numérique. Or, pour réaliser cette conversion le signal continu doit être “gelé” pendant un temps bref, le temps que le convertisseur opère et donne la valeur en sortie. Cette étape de “blocage” du signal d'entrée, suivie de la conversion, entraîne irrémédiablement un certain délai temporel durant lequel le signal d'entrée, même si sa valeur change, n'est pas pris en compte. Le signal initial, continu du temps, est donc transformé en un signal discret, dit “échantillonné” avec une période d'échantillonnage Te (temps entre 2 points consécutifs). Intuitivement, on comprend qu'un signal alternatif à haute fréquence nécessite d'être échantillonné plus rapidement qu'un signal de plus faible fréquence.

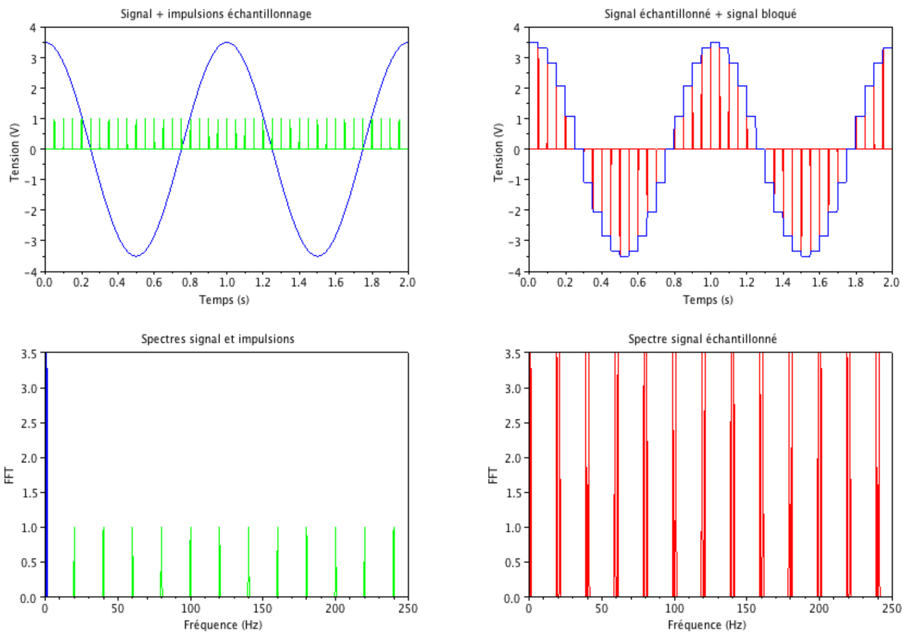
Le programme suivant va nous permettre d'avoir une approche plus quantitative :

```
N=1000; dt=0.002; t=dt*[0:N-1];
Tech=0.05; Nmotifs=dt*N/Tech; E=3.5;
Nech=Tech/dt;
V=E*cos(2*%pi*1*t);
motif=[ones(1,1),zeros(1,Nech-1)];
imp=matrix(motif'*ones(1,Nmotifs),1,N);
Vech=V.*imp;
Vb=convol(ones(1,Tech/dt),Vech);
subplot(2,2,1);
plot(t,V,'-b');
plot(t,imp,'-g');
xtitle("Signal + impulsions échantillonnage","Temps (s)","Tension (V)");
subplot(2,2,2);
plot(t,Vech,'-r');
plot(t,Vb(1:N),'-b');
xtitle("Signal échantillonné + signal bloqué ","Temps (s)","Tension (V)");
Vf=fft(V,-1);
Vimp=fft(imp,-1);
Vechf=fft(Vech,-1);
fr=1/(N*dt)*(0:N-1);
subplot(2,2,3);
plot(fr(2:N/2),2/N*abs(Vf(2:N/2)),'-b');
plot(fr(2:N/2),Nech/N*abs(Vimp(2:N/2)),'-g');
xtitle("Spectres signal et impulsions","Fréquence (Hz)","FFT");
subplot(2,2,4);
plot(fr(2:N/2),2*Nech/N*abs(Vechf(2:N/2)),'r');
xtitle("Spectre signal échantillonné","Fréquence (Hz)","FFT");
```

Expliquez ce que représente chacune des fenêtres graphiques.
Précisez la fréquence du signal d'entrée et la fréquence d'échantillonnage. Calculez leur ratio.
Regardez le spectre de fréquence du signal échantillonné; qu'est ce que l'échantillonnage temporel a entraîné dans le domaine fréquentiel ? Notez les 10 premières fréquences. En vous aidant du spectre fréquentiel des impulsions, justifiez ces valeurs.

On garde la période d'échantillonnage fixe, égale à 0.05 s, et on augmente petit à petit la fréquence du signal d'entrée : 4 Hz, 5 Hz. Que se passe-t-il à cette fréquence pour le signal échantillonné ? Combien prend-on d'échantillons par période du signal d'entrée ? Continuez à augmenter la fréquence. Que se passe-t-il pour f=10 Hz dans le spectre en fréquence ? Notez l'amplitude des pics ? Continuez à augmenter la fréquence petit à petit, que voyez-vous pour f=19 Hz dans le signal temporel ? Quelle fréquence apparente observez-vous ? Justifiez à partir du spectre, et donnez la relation entre la fréquence vraie du signal et la fréquence apparente. Cet effet s'appelle le repliement de spectre ou “aliasing” en anglais.

Jusqu'à quelle fréquence maximale du signal d'entrée, ce repliement de spectre ne pose pas de problème ? A quelle valeur de la fréquence d'échantillonnage correspond-elle ? Ceci est le critère de Nyquist-Shannon. Formulez-le.



Modifiez le signal d'entrée par un signal carré. Simulez pour différents rapports entre période du signal et période d'échantillonnage. Comparez les harmoniques du signal d'entrée et du signal échantillonné.

2- Reconstruction temporelle d'un signal échantillonné

Comme nous venons de le voir, le phénomène de repliement de spectre peut dans certains cas modifier fortement le spectre du signal échantillonné par rapport au signal d'entrée. Qu'en est-il du signal temporel ? Pour nous en rendre compte, nous allons reconstruire un signal continu à partir des valeurs échantillonnées en utilisant la formule d'interpolation de Whittaker-Shannon :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

où *x(nT)* représente les échantillons successifs d'indice *n* et *T* est la période d'échantillonnage. Evidemment, cette formule n'est valable que lorsque le critère de Nyquist-Shannon est lui-même vérifié.

Reprenez le programme précédent et rajoutez les lignes suivantes :

```
te=Tech*[0:Nmotifs-1];
for i=1:length(t)
    tmp=0;
    for j=1:Nmotifs
        tmp=tmp+Vech(1+(j-1)*Tech/dt).*sinc(%pi*(t(i)-te(j))/Tech);
    end
    Vr(i)=tmp;
end
```

Affichez le signal reconstruit Vr sur le même graphe temporel que le signal d'entrée. En commançant par le signal sinusoïdal, placez-vous dans de bonnes conditions d'échantillonnage. Que peut-on dire du signal reconstruit ? Que se passe-t-il aux limites, c'est-à-dire pour les premiers et derniers échantilons ? Recommencez en réduisant la période d'échantillonnage ou en augmentant la fréquence du signal. Conclusion.
Passez au signal carré. Que remarque-t-on au niveau des discontinuités ?