

TD n°5 Notions d'intégration

Formes élémentaires

Exercice I Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} a) \int \left(2x^3 - 3 \sin x + 5 \frac{1}{\sqrt{x}} + x^4 \sqrt{x} \right) dx & b) \int \cos^3 x \sin x dx & c) \int \tan x dx \\ d) \int \frac{\ln t}{t} dt & e) \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}} dx & \end{array}$$

Exercice II Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^2 (2 + 3 \sin(\pi x)) dx \quad b) \int_2^e \frac{\ln t}{t} dt \quad c) \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t} dt \quad d) \int_0^1 t^2 2^{t^3} dt$$

Exercice III Pour chacun des signaux périodiques ci-dessous calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace :

Remarque On tracera chaque signal sur 3 périodes.

$$\begin{array}{l} a) \text{ signal carré : } V_1(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, 1[\\ -1, t \in [1, 2[\end{cases} \\ b) \text{ signal triangle : } V_2(t) = \begin{cases} 4t + 2, t \in [-\frac{1}{2}, 0[\\ -4t + 2, t \in [0, \frac{1}{2}[\end{cases} \\ c) \text{ signal sinusoïdal : } V_3(t) = 1 + 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

$$d) \text{ signal redressé mono-alternance : } V_4(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0, t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Exercice IV Calculer l'aire \mathcal{A} de la région du plan comprise entre les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$.

Tracer les 2 courbes et identifier cette région.

Intégration par parties

Exercice V

a) Calculer $\int x e^x dx$.

b) On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ où $n \in \mathbb{N}$.

Calculer I_1 et I_2 . Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .

Exercice VI

Calculer : a) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$ c) $\int x \ln x dx$

Fractions rationnelles

Exercice VII En utilisant le TD 4, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$a) \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \quad b) \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} \quad c) \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$$

Changement de variable

Exercice VIII Calculer en utilisant le changement de variable demandé :

$$a) I(R) = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \text{ en posant } x = Ry \text{ et ensuite } y = \sin t.$$

Tracer pour $x \in [-R, R]$ la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. En déduire directement la valeur de $I(R)$.

$$b) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \text{ en posant } t = \sqrt{x}$$

Intégrales impropres

Exercice IX Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3} \quad b) \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx \quad c) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice X Calculer : a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$)