IUT de Nîmes — Mathématiques - MA3
GEII 2-ème année — 2016/17

TD n° 4 : Suites et séries

SERIES NUMERIQUES A TERMES POSITIFS

Exercice I

Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$.

(a) Montrer que cette série converge.

(b) Calculer sa somme.

Exercice II

Précisez la nature (divergence ou convergence) des séries numériques suivantes, en justifiant votre réponse :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{4n^2-n+3}{(n^3+2n)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$.

Exercice III

Précisez la nature (divergence ou convergence) des séries numériques suivantes, en justifiant votre réponse :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{3^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

SERIES NUMERIQUES A TERMES QUELCONQUES

Exercice IV

Etudier la convergence absolue, ainsi que simple des séries :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+2n+3}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercices facultatifs

Exercice V

Etudier les séries suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n^3}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Exercice VI

Etudier la convergence absolue, ainsi que simple de la série : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

SERIES ENTIERES

Exercice VII

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

(a) $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{x}{n}\right)^n$; (b) $\sum\limits_{n\geq 1} n(n+1)x^n$; (c) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{x^n}{(2n)^2}$.

N.B. On donnera le domaine de convergence après l'étude aux bornes.

Exercice VIII

Calculer $\sum\limits_{n\geq 1} nx^n$ sur son intervalle de convergence que l'on précisera.

Exercice IX

A partir de $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ sur $]-1,\,1[$, donner le développement en série entière (**DSE**) de :

(a) $\frac{1}{1+x^2}$

(b) $\arctan x$ en précisant sur quel intervalle.

Rappel : $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \arctan x + const.$

Exercice X

Donner les **DSE** des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

(a) $\cosh x$; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; (c) $\sinh x$ (facultatif)

Rappel : $\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

SERIES ENTIERES - APPLICATIONS

Exercice XI

A l'aide d'un **DSE** expliciter : $f(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice XII

Trouver sous forme de série entière la solution de : $\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$.