

Suites et séries

TD n° 4 : SERIES

SERIES NUMERIQUES A TERMES POSITIFSExercice I

Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$.

- (a) Montrer que cette série converge.
(b) Calculer sa somme.

Exercice II

Précisez la nature (divergence ou convergence) des séries numériques suivantes, en justifiant votre réponse :

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)}$; (b) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; (c) $\sum_{n \geq 1} \frac{4n^2 - n + 3}{(n^3 + 2n)}$; (d) $\sum_{n \geq 1} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$.

Exercice III

Précisez la nature (divergence ou convergence) des séries numériques suivantes, en justifiant votre réponse :

(a) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$; (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{3^n}$; (c) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

SERIES NUMERIQUES A TERMES QUELCONQUESExercice IV

Etudier la convergence absolue, ainsi que simple des séries :

(a) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$; (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercices facultatifs

Exercice V

Etudier les séries suivantes : (a) $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n^3}$; (c) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Exercice VI

Etudier la convergence absolue, ainsi que simple de la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

SERIES ENTIERES

Exercice VII

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{n}\right)^n ; \quad (b) \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^n ; \quad (c) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(2n)^2} .$$

N.B. On donnera le domaine de convergence après l'étude aux bornes.

Exercice VIII

Calculer $\sum_{n \geq 1} nx^n$ sur son intervalle de convergence que l'on précisera.

Exercice IX

A partir de $\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ sur $] -1, 1[$, donner le développement en série entière (**DSE**)

de :

$$(a) \frac{1}{1+x^2}$$

(b) **arctan** x en précisant sur quel intervalle.

$$\text{Rappel : } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + \text{const.}$$

Exercice X

Donner les **DSE** des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

$$(a) \cosh x ; \quad (b) \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} ; \quad (c) \sinh x \text{ (facultatif)}$$

$$\text{Rappel : } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

SERIES ENTIERES - APPLICATIONS

Exercice XI

A l'aide d'un **DSE** expliciter : $f(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice XII

Trouver sous forme de série entière la solution de :
$$\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} .$$