IUT de Nîmes
GEII 2-ème année

Mathématiques - MA3
2016/17

TD n^{o} 2 : Matrices

Matrices : opérations élémentaires

Exercice 1

Soit les matrices suivantes : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{U} = (1, -3, 2)$; $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer si possible les produits suivants : $\boldsymbol{UU^T}$, $\boldsymbol{AU^T}$, $\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{UM}$, $\boldsymbol{U^TA}$, $\boldsymbol{U^TU}$, $\boldsymbol{AS}$ et $\boldsymbol{SA}$.

Exercice 2

Soit les matrices suivantes : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ si possible.

Exercice 3

Calculer $\boldsymbol{A^2}$, $\boldsymbol{A^3}$ puis $\boldsymbol{A^n}$ dans les cas suivants :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible. Déterminants

Exercice 4

On considère le système linéaire suivant :

$$(\boldsymbol{S}) \ : \ \begin{cases} 2x & +2y & +3z & = a \\ x & -y & & = b \\ -x & +2y & +z & = c \end{cases}$$

1) Le résoudre en fonction de $\boldsymbol{a, b, c}$. Quelle matrice est ainsi inversible ? Quelle est son inverse ?

2) La matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Que vaut son inverse ?

3) Trouver la solution du système $\boldsymbol{Mv} = \boldsymbol{b}$, pour $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants. (On pourra utiliser les règles de simplification !) :

$$\boldsymbol{\Delta_1} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 6

Calculer par la méthode du système l'inverse éventuel de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Calculer si possible l'inverse de $\boldsymbol{A}$ par la méthode de Gauss dans les cas suivants :

$$(a) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \;\; ; \; (b) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (**Facultatif**)

Soit les applications géométriques classiques : homothéties, rotations, symétries, projections.

$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{S_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{P_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $\boldsymbol{H^2}$. Interprétez le résultat.

2) Calculer $\boldsymbol{R_\theta^2}$, puis $\boldsymbol{R_{-\theta}R_\theta}$. Interprétez le résultat.

Quelle(s) valeur(s) de $\boldsymbol{\theta}$ faut-il choisir pour que $\boldsymbol{R_\theta^4 = I}$?

3) Calculer $\boldsymbol{S_2^2}$ et $\boldsymbol{S_2^k}$; puis $\boldsymbol{S_3^2}$ et $\boldsymbol{S_3^k}$. Interprétez les résultats.

4) Calculer $\boldsymbol{HS_2}$. Interprétez le résultat.

5) Calculer $\boldsymbol{P_2^2}$ et $\boldsymbol{P_2^k}$; puis $\boldsymbol{P_3^2}$ et $\boldsymbol{P_3^k}$. Interprétez les résultats

6) Calculer $\boldsymbol{S_2P_2}$ et $\boldsymbol{P_2S_2}$; puis $\boldsymbol{S_3P_3}$ et $\boldsymbol{P_3S_3}$. Interprétez les résultats.

Exercice 9 (**Facultatif**)

Calculer le déterminants suivant :

$$\boldsymbol{\Delta_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$