IUT de Nîmes — Mathématiques - MA3
GEII 2-ème année — 2016/17

TD n° 2 : Matrices

Matrices : opérations élémentaires

Exercice 1

Soit les matrices suivantes : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{U} = (1, -3, 2)$; $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer si possible les produits suivants : $\boldsymbol{UU^T}$, $\boldsymbol{AU^T}$, $\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{UM}$, $\boldsymbol{U^TA}$, $\boldsymbol{U^TU}$, $\boldsymbol{AS}$ et $\boldsymbol{SA}$.

Exercice 2

Soit les matrices suivantes : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ si possible.

Exercice 3

Calculer $\boldsymbol{A^2}$, $\boldsymbol{A^3}$ puis $\boldsymbol{A^n}$ dans les cas suivants :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible. Déterminants

Exercice 4

Calculer par la méthode du système l'inverse éventuel de :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants. (On pourra utiliser les règles de simplification !) :

$$\boldsymbol{\Delta_1} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

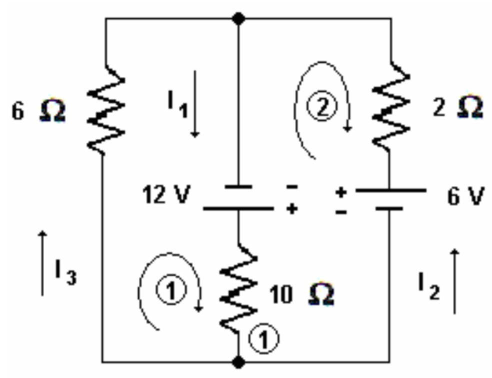

Figure 1:

Exercice 6

On considère le circuit représenté à la Fig. 1 dont on veut calculer les courants $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ et $\boldsymbol{I_3}$ circulant dans chaque branche.

Si on écrit la loi des noeuds au point **1** et les lois des mailles, on obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$(\boldsymbol{S})\ :\ \begin{cases} \boldsymbol{I_1} & -\boldsymbol{I_2} & -\boldsymbol{I_3} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{10}\boldsymbol{I_1} & & +\mathbf{6}\boldsymbol{I_3} & = \mathbf{12} \\ \mathbf{10}\boldsymbol{I_1} & +\mathbf{2}\boldsymbol{I_2} & & = \mathbf{18} \end{cases}$$

La résolution de ce système s'obtient en inversant la matrice des résistances:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

1) La matrice $\boldsymbol{R}$ est-elle inversible ?

2) Trouver les valeurs des 3 courants $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ et $\boldsymbol{I_3}$.

Exercice 7

On considère le circuit le circuit représenté à la Fig. 1 dont on veut calculer les courants $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ et $\boldsymbol{I_3}$ circulant dans chaque branche. En utilisant la loi des noeuds et la loi des mailles, identifiez la matrice des résistances et calculer les 3 courants.

Exercice 8

On considère le circuit le circuit représenté à la Fig. 3. Les 5 résistances de ce montage sont égales à $\boldsymbol{R = 100\Omega}$ et la tension $\boldsymbol{V_{AC} = 15}$ V. Calculer les valeurs des courants $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$, $\boldsymbol{I_3}$, $\boldsymbol{I_4}$ et $\boldsymbol{I_5}$.

On identifiera la matrice des résistances, d'ordre **5** et on calculera son déterminant.

Exercice 9

Calculer si possible l'inverse de $\boldsymbol{A}$ par la méthode de Gauss dans les cas suivants :

$$(\boldsymbol{a}) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \ ;\ (\boldsymbol{b}) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

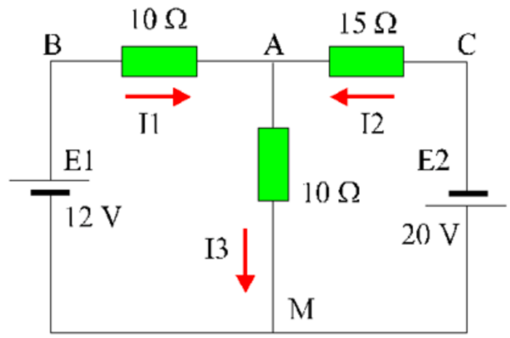

Figure 2:

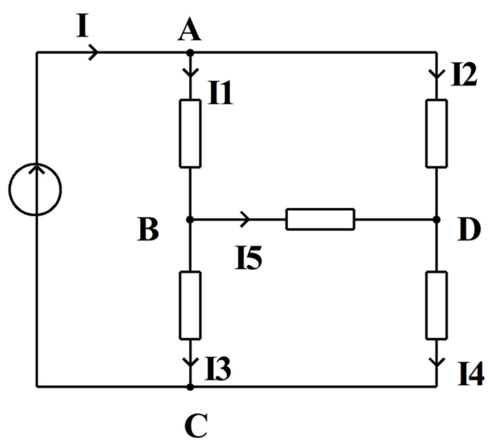

Figure 3:

<u>Exercice 10</u> (**Facultatif**)

Soit les applications géométriques classiques : homothéties, rotations, symétries, projections.

$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{S_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{P_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $\boldsymbol{H^2}$. Interprétez le résultat.

2) Calculer $\boldsymbol{R_\theta^2}$, puis $\boldsymbol{R_{-\theta} R_\theta}$. Interprétez le résultat.

Quelle(s) valeur(s) de $\boldsymbol{\theta}$ faut-il choisir pour que $\boldsymbol{R_\theta^4} = \boldsymbol{I}$?

3) Calculer $\boldsymbol{S_2^2}$ et $\boldsymbol{S_2^k}$; puis $\boldsymbol{S_3^2}$ et $\boldsymbol{S_3^k}$. Interprétez les résultats.

4) Calculer $\boldsymbol{H S_2}$. Interprétez le résultat.

5) Calculer $\boldsymbol{P_2^2}$ et $\boldsymbol{P_2^k}$; puis $\boldsymbol{P_3^2}$ et $\boldsymbol{P_3^k}$. Interprétez les résultats

6) Calculer $\boldsymbol{S_2 P_2}$ et $\boldsymbol{P_2 S_2}$; puis $\boldsymbol{S_3 P_3}$ et $\boldsymbol{P_3 S_3}$. Interprétez les résultats.