IUT de Nîmes — Mathématiques, **Module MA1**
GEII 1-ère année — 2016/17

TD n° 2
Fonctions à variable réelle

Domaines de définition et d'étude d'une fonction

Exercice I

Pour les fonctions usuelles suivantes, préciser leurs domaines de définition ainsi que d'étude (en précisant leur éventuelle parité et/ou périodicité) :

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$
d) $h(x) = \sin x$ e) $k(x) = \cos x$ f) $p(x) = \tan x$
g) $u(x) = \ln x$ h) $v(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice II

Déterminer les domaines de définition ainsi que d'étude (en précisant leur éventuelle parité et/ou périodicité) des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$
c) $h(x) = \sin 2x + 2\sin x$ d) $k(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
e) $p(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Limites, continuité et asymptotes d'une fonction

Exercice III

Trouver les limites suivantes : (la notation $|x| \to +\infty$ signifie qu'il est demandé de calculer les limites pour $x \to -\infty$ ainsi que pour $x \to +\infty$)

a) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$

c) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2x^3 + 3x + 1}{6x^3 - 5x}$ d) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{-7x^2 - 1}{3x - 1}$ e) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{2x^3 - 7x - 1}$

Exercice IV

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

Exercice V (***Facultatif***)

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin x} & \text{pour } x \neq 0 \\ a & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Comment doit-on choisir a pour que f soit continue en 0 ?

Exercice VI

1) Calculer les limites

$$\text{a)} \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} \qquad \text{b)} \lim_{|x|\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+2x+2} - x\right]$$

2) En utilisant les valeurs des limites trouvées à la question précedente, déduisez l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$.

Dérivée, dérivabilité, extremum. Dérivée seconde.

Exercice VII

Calculer $f'(x)$ lorsque f est dérivable :

a) $(2x-3)\cos x$ b) $\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2+1}$ c) $(x^2-2)^4$ c) $\dfrac{x^2}{(x^2-1)^2}$

d) $\sin x + \dfrac{1}{\cos x}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$

Exercice VIII

Soit la courbe $\mathcal{C}_f$ correspondant à la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R} &\to \mathcal{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad (a, b, c, d \in \mathcal{R}). \end{aligned}$$

1) Trouver a, b, c, d afin que $\mathcal{C}_f$ passe par $A(4,0)$ et $B(0,4)$ avec des tangentes horizontales en ces points.

2) (***Facultatif***) Montrer que le point I, milieu de $[AB]$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

Etude de fonctions

Exercice IX Soit la fonction $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Préciser le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et indiquer les asymptotes éventuelles.

c) Calculer la dérivée f' et donner le tableau de variation.

Exercice X Couple électromagnétique en fonction du glissement

Pour une machine asynchrone, on démontre que le couple électromagntique T_{em} en fonction du glissement g a l'expression suivante :

$$T_{em} = \frac{3V^2}{\Omega_S} \cdot \frac{\frac{R}{g}}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + X^2}.$$

L'expression ci-dessus peut être écrite successivement :

$$T_{em} = 2T_M \frac{1}{\left(\frac{g}{g_M}\right) + \left(\frac{g_M}{g}\right)} = 2T_M \frac{g\, g_M}{g^2 + g_M^2}.$$

où $T_M = \dfrac{3V^2}{2X\Omega_S}$ et $g_M = \dfrac{R}{X}$.

Pour simplifier, on se propose d'étudier la fonction suivante :

$$f(x) = 2T . \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

avec T et a réels.

Exercice XI

Etude de $y = 2\sin x + \sin 2x$. On fera une représentation détaillée sur la période.

Exercice XII Filtre passe bas du second ordre

La fonction de transfert canonique (normalisée) d'un filtre passe bas du second ordre est :

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2m\frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2}$$

où m est le facteur d'amortissement et f_0 la fréquence propre.

a) Montrer que :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 4m^2\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

b) Pour simplifier, on pose $x = \frac{f}{f_0}$ et on se propose d'étudier la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4m^2x^2}}$$

c) Donner les allures des répresentations de $g(x)$ pour les cas particuliers : $m_1 = 0.5$ et $m_2 = 1$. Y-a-t il des différences ?

Exercice XIII (***Facultatif***)

On se propose de résoudre : $e^x = -x \quad (E)$.

a) Soit $f : [-2, 4] \to \mathcal{R}$

$$x \mapsto 1 + xe^{-x}$$

Etudier les variations de f.

b) Montrer que (E) admet une seule solution $\alpha \in]-2, 1[$. Encadrer α dans un intervalle de longueur inférieure ou égale à 0.50