

TD n° 2

Fonctions à variable réelle

Domaines de définition et d'étude d'une fonction

Exercice I

Pour les fonctions usuelles suivantes, préciser leurs domaines de définition ainsi que d'étude (en précisant leur éventuelle parité et/ou périodicité) :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 & \text{b) } g(x) = x^3 & \text{c) } h(x) = \sqrt{x} \\ \text{d) } h(x) = \sin x & \text{e) } k(x) = \cos x & \text{f) } p(x) = \tan x \\ \text{g) } u(x) = \ln x & \text{h) } v(x) = \frac{1}{x} & \end{array}$$

Exercice II

Déterminer les domaines de définition ainsi que d'étude (en précisant leur éventuelle parité et/ou périodicité) des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x} & \text{b) } g(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \\ \text{c) } h(x) = \sin 2x + 2 \sin x & \text{d) } k(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \\ \text{e) } p(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) & \end{array}$$

Limites, continuité et asymptotes d'une fonction

Exercice III

Trouver les limites suivantes : (la notation $|x| \rightarrow +\infty$ signifie qu'il est demandé de calculer les limites pour $x \rightarrow -\infty$ ainsi que pour $x \rightarrow +\infty$)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5} & \\ \text{c) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 3x + 1}{6x^3 - 5x} & \text{d) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-7x^2 - 1}{3x - 1} & \text{e) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{2x^3 - 7x - 1} \end{array}$$

Exercice IV

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} \end{array}$$

Exercice V (Facultatif)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3 \sin x} & \text{pour } x \neq 0 \\ a & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Comment doit-on choisir a pour que f soit continue en 0 ?

Exercice VI

1) Calculer les limites

$$\text{a) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x} \quad \text{b) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x \right]$$

2) En utilisant les valeurs des limites trouvées à la question précédente, déduisez l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Dérivée, dérivabilité, extremum. Dérivée seconde.

Exercice VII

Calculer $f'(x)$ lorsque f est dérivable :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (2x - 3) \cos x & \text{b) } \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{c) } (x^2 - 2)^4 & \text{c) } \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ \text{d) } \sin x + \frac{1}{\cos x} & \text{e) } \frac{\sqrt{x}}{(x - 1)^2} & & \end{array}$$

Exercice VIII

Soit la courbe \mathcal{C}_f correspondant à la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (a, b, c, d \in \mathcal{R}). \end{aligned}$$

1) Trouver a, b, c, d afin que \mathcal{C}_f passe par $A(4, 0)$ et $B(0, 4)$ avec des tangentes horizontales en ces points.

2) (**Facultatif**) Montrer que le point I , milieu de $[AB]$ est centre de symétrie pour \mathcal{C}_f .

Etude de fonctions

Exercice IX Soit la fonction $f(x) = x + 2 + \frac{x + 1}{x - 1}$.

- Préciser le domaine de définition de f .
- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et indiquer les asymptotes éventuelles.
- Calculer la dérivée f' et donner le tableau de variation.

Exercice X Couple électromagnétique en fonction du glissement

Pour une machine asynchrone, on démontre que le couple électromagnétique T_{em} en fonction du glissement g a l'expression suivante :

$$T_{em} = \frac{3V^2}{\Omega_S} \cdot \frac{\frac{R}{g}}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + X^2}.$$

L'expression ci-dessus peut être écrite successivement :

$$T_{em} = 2T_M \frac{1}{\left(\frac{g}{g_M}\right) + \left(\frac{g_M}{g}\right)} = 2T_M \frac{g g_M}{g^2 + g_M^2}.$$

où $T_M = \frac{3V^2}{2X\Omega_S}$ et $g_M = \frac{R}{X}$.

Pour simplifier, on se propose d'étudier la fonction suivante :

$$f(x) = 2T \cdot \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

avec T et a réels.

Exercice XI

Etude de $y = 2 \sin x + \sin 2x$. On fera une représentation détaillée sur la période.

Exercice XII Filtre passe bas du second ordre

La fonction de transfert canonique (normalisée) d'un filtre passe bas du second ordre est :

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2m \frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2}$$

où m est le facteur d'amortissement et f_0 la fréquence propre.

a) Montrer que :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 4m^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

b) Pour simplifier, on pose $x = \frac{f}{f_0}$ et on se propose d'étudier la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4m^2 x^2}}$$

c) Donner les allures des représentations de $g(x)$ pour les cas particuliers : $m_1 = 0.5$ et $m_2 = 1$. Y-a-t il des différences ?

Exercice XIII (*Facultatif*)

On se propose de résoudre : $e^x = -x$ (E).

a) Soit $f : [-2, 4] \rightarrow \mathcal{R}$

$$x \mapsto 1 + xe^{-x}$$

Etudier les variations de f .

b) Montrer que (E) admet une seule solution $\alpha \in]-2, 1[$. Encadrer α dans un intervalle de longueur inférieure ou égale à **0.50**