TD 1 - Nombres complexes

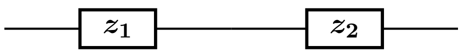
N.B. Pour tous les exercices ci-dessous, représenter graphiquement les résultats obtenus.

1) Propriétés élémentaires et opérations avec les nombres complexes

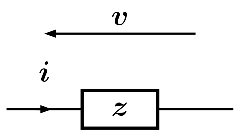
Exercice I

Soient les deux nombres complexes : $\boldsymbol{z_1 = 1 + j3}$ et $\boldsymbol{z_2 = 2 + j4}$.
Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ En génie électrique, ce calcul correspond à calculer l'impédance équivalente de deux impédances montées en série ($\boldsymbol{z_{eq} = z_1 + z_2}$).



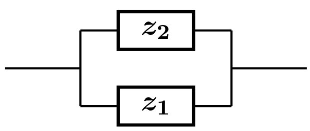
2. $\boldsymbol{z_1.z_2}$ Cela correspond par exemple à calculer en régime sinusoïdal établi, la tension complexe $\boldsymbol{v}$ aux bornes d'une impédance $\boldsymbol{z = 1 + 3j}$ traversée par un courant $\boldsymbol{i = 2 + 4j}$ ($\boldsymbol{v = z.i}$).



3. $\boldsymbol{\dfrac{z_1}{z_2}}$. Cela correspond à calculer le courant $\boldsymbol{i}$ qui traverse une impédance $\boldsymbol{z = 2 + 4j}$ ayant une tension $\boldsymbol{v = 1 + 3j}$ à ses bornes $\left(\boldsymbol{i = \dfrac{v}{z}}\right)$.

Exercice II

Soient les deux nombres complexes : $\boldsymbol{z_1 = 2 - j3}$ et $\boldsymbol{z_2 = 5 + j}$.
Calculer l'argument du nombre complexe $\boldsymbol{z}$ défini par : $\boldsymbol{\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}}$. Ce calcul correspond au calcul de l'impédance équivalente de deux impédances $\boldsymbol{z_1}$ et $\boldsymbol{z_2}$ montées en parallèle.



Exercice III

Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\boldsymbol{z = \dfrac{-\sqrt{3} + j}{1 + j}}$.

Exercice IV

Effectuer les différentes opérations proposées (mettre ces résultats sous la forme (ρ, θ))

1. $z = (10, \widehat{-40^o})$ calculer : $z.\overline{z} = |z|^2$
2. $z = (20, \widehat{-53,1^o})$ calculer : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z = 2,5\, e^{-j\pi/4}$ calculer : $z.\overline{z}$
4. $z = 2 + j8$ calculer : $z - \overline{z} = 2j\mathrm{Im}(z)$
5. $z = (r, \widehat{\theta})$ calculer : $z/\overline{z}$

Exercice V

Mettre sous la forme $a+jb$ (partie réelle et partie imaginaire) les nombres complexes suivants :

$$\frac{(2+j5)(-2+j5)}{5+j3} \qquad e^{-j\,214\pi} + e^{-j\,4\pi}$$

$$\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j} \qquad \frac{\cos\theta + j\sin\theta}{\sin\theta - j\cos\theta}$$

2) Applications

Exercice VI

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

Tout signal alternatif sinusoïdal de type $u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \phi)$ peut être représenté par un vecteur de norme U_{eff} tournant à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$ (rad.s^{-1}), avec U_{eff} (V) la tension efficace, ϕ (rad) la phase et f la fréquence (Hz).

Le **vecteur de Fresnel** $\vec{U}$ est la représentation de ce vecteur à l'instant $t = 0$. La phase à l'origine ϕ est l'angle entre l'axe Ox et le vecteur.

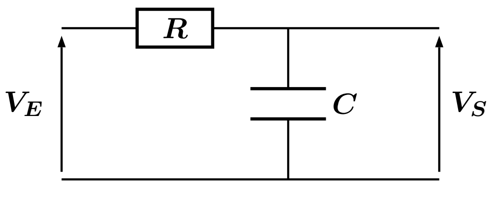
Au vecteur de Fresnel $\vec{U}$ on peut lui associer ensuite le nombre complexe $\underline{U}$ de module U_{eff} et argument ϕ.

Soient les signaux $u_1(t) = 3\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \pi/3)$ et $u_2(t) = 4\sqrt{2}\sin(2\pi ft - \pi/4)$.

a) Donner leurs représentations complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ sous les formes polaire et algébrique.

b) Donner les représentations temporelles de $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ et $u_4(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

Exercice VII



Un filtre RC a pour fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j0.1f}$$

Calculer le module et l'argument de cette fonction de transfert pour les 5 fréquences suivantes :

f	1 Hz	5 Hz	10 Hz	20 Hz	100 Hz
Module					
Argument					

En déduire le type de filtre.

3) Formules d'Euler et de Moivre

Exercice VIII

En utilisant les relations d'Euler :

a) Retrouver en fonction des angles $(\alpha+\beta)$ et $(\alpha-\beta)$ les expressions de :

$$\sin\alpha.\sin\beta \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha.\sin\beta \text{ (Facultatif)}$$

b) Calculer : $\cos^2\alpha$ et $\sin^3\alpha$ (facultatif).

Exercice IX

En utilisant les formules de Moivre, calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice X

La puissance instantanée dissipée dans un dipôle linéaire, qui est soumis à une tension $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$ est définie par la relation : $p(t) = v(t)\cdot i(t)$.
En utilisant les relations d'Euler, montrer que cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double.

4) Racine carrée

Exercice XI Déterminer z tel que :

a) $z^2 = -5-12\,j$ b) $z^2 = j-\sqrt{3}$

5) Exercices facultatifs

Exercice XII

a) Calculer le module et l'argument de $(1+j)^n$ et de $(1-j)^n$, $n\in\mathcal{N}$.
b) Montrer que leur somme $(1+j)^n+(1-j)^n$ est un nombre réel.

Exercice XIII

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de module égal à $\mathbf{1}$, le nombre complexe z tel que

$$z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}$$

est réel.

Exercice XIV

En utilisant les formules de Moivre, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice XV

En utilisant les relations d'Euler calculer : $\cos^4\theta$ et $\sin^5\theta$.

Exercice XVI

Soit : $\sin(x\theta) = 4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)$.

En utilisant uniquement les relations d'Euler, déterminer la valeur de x.

Exercice XVII

Déterminer z tel que :

$$z^5 = j - \sqrt{3}\,.$$

Exercice XVIII

Calculer les racines de l'équation du 2$^{\text{ème}}$ degré à coefficients complexes :

$$(3+7j)z^2 - 8(1+2j)z + 4(1+j) = 0\,.$$

Exercice XIX

Trouver le couple (a, b) de nombres réels tels que le nombre complexe $(1+j)$ soit solution de l'équation :

$$z^7 + az^5 + b = 0\,.$$