IUT de Nîmes — Mathématiques, **Module MA2**
GEII 1-ère année — 2016/17

TD n°5 Notions d'intégration

Formes élémentaires

Exercice I Calculer les primitives suivantes :

$a)\ \displaystyle\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\frac{1}{\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int \cos^3 x\ \sin x\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int \tan x\,\mathrm{d}x$

$d)\ \displaystyle\int \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \qquad e)\ \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice II Calculer les intégrales suivantes :

$a)\ \displaystyle\int_0^2 (2+3\sin(\pi x))\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_2^e \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \qquad c)\ \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad d)\ \int_0^1 t^2\, 2^{t^3}\,\mathrm{d}t$

Exercice III Pour chacun des signaux périodiques ci-dessous calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace :
Remarque On tracera chaque signal sur 3 périodes.

$a)$ signal carré : $V_1(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1[\\ -1, t \in [1,2[\end{cases}$

$b)$ signal triangle : $V_2(t) = \begin{cases} 4t+2, t \in [-\frac{1}{2}, 0[\\ \\ -4t+2, t \in [0, \frac{1}{2}[\end{cases}$

$c)$ signal sinusoïdal : $V_3(t) = 1 + 2\cos(\pi t + \dfrac{\pi}{4})$

$d)$ signal redressé mono-alternance : $V_4(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0, t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$

Exercice IV Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan comprise entre les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$.
Tracer les 2 courbes et identifier cette région.

Intégration par parties

Exercice V

a) Calculer $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

b) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^x\,\mathrm{d}x$ où $n \in \mathbb{N}$.
Calculer I_1 et I_2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

Exercice VI

Calculer : $a)\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x \qquad b)\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int x\ \ln x\,\mathrm{d}x$

Fractions rationnelles

Exercice VII En utilisant le **TD 4**, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$a)\quad \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} \qquad b)\quad \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} \qquad c)\quad \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$$

Changement de variable

Exercice VIII Calculer en utilisant le changement de variable demandé :

$a)$ $I(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = Ry$ et ensuite $y = \sin t$.
Tracer pour $x \in [-R, R]$ la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. En déduire directement la valeur de $I(R)$.

$b)$ $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{x}$

Intégales impropres

Exercice IX Les intégales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$a)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+4x^3} \qquad b)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice X Calculer : $a)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ $(a > 0)$