Développements en série entière (DSE) usuels

Théorème

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}[$ et si toutes ses dérivées sont bornées sur $]-\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}[$, alors $\boldsymbol{f}$ admet un développement en **série de Maclaurin** sur $]-\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}[$ et on a :

$$\forall x \in]-R,R[\quad : \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Les DSE des fonctions usuelles :

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots, \qquad R=+\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots, \qquad R=+\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots, \qquad R=+\infty$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\dots, \qquad R=1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\dots, \qquad R=1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots, \qquad R=1$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\dots, \qquad R=1$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\dots, \qquad R=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\dots, \qquad R=1$$