Travaux Pratiques - Série 4, TP° 1
Séries de Fourier - Bonus

Ce TP complète l'étude de la série de Fourier pour le signal signal carré représenté dans la Figure. 1. On continuera donc dans le même fichier Scilab. Le but est de comprendre les erreurs d'approximations inhérentes aux méthodes numériques.

Dans la section 1 on s'intéresse à l'erreur d'approximation des coefficients de Fourier lorsqu'on utilise l'intérgration numérique. Dans la section 2 on s'intéresse à l'erreur d'approximation du signal par la série de Fourier tronquée (c'est-à-dire, lorsqu'on reconstitue le signal avec un nombre fini d'harmoniques).

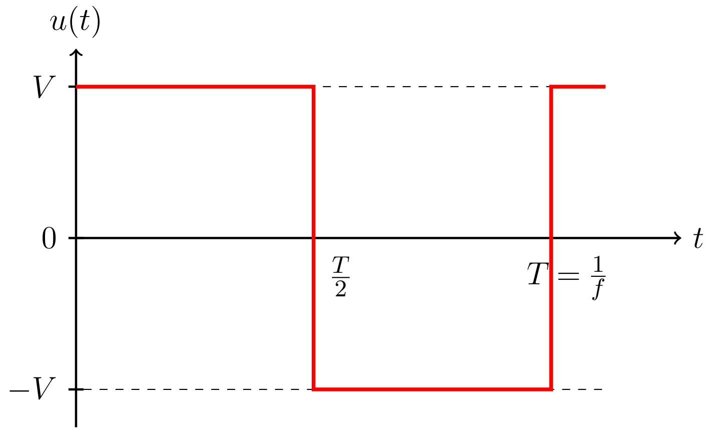

Figure 1 – Signal carré impair.

1 Erreur d'approximation lors du calcul des coefficients de Fourier

On a vu en TD de Maths que le développement en série de Fourier du signal $u(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$u(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{(2n+1)} \tag{1}$$

1. Écrire à l'aide de cette formule les fonctions `an_theo` et `bn_theo` permettant de calculer les coefficients de Fourier théoriques pour un signal carré impair. Comme pour les fonctions `an_num` et `bn_num` (vues dans le TP précédent), les fonctions `an_theo` et `bn_theo` doivent renvoyer un vecteur des valeurs correspondants aux coefficients a_n et b_n respectivement de 0 et jusqu'au nombre souhaité d'harmoniques. Quels arguments doit-on donc choisir pour ces fonctions ?
2. Comparer les valeurs des amplitudes des 10 premières composantes obtenues numériquement (cf. TP 1) à celles issues des calculs théoriques. Vous pouvez, par exemple, lancer une nouvelle figure avec `figure(1)` et tracer à l'aide de la fonction `bar` les histogrammes de l'erreur relative entre la valeur numérique et la valeur théorique pour les coefficients a_n et b_n. Y a-t-il des précautions à prendre pour faire ces calculs ? À quoi sont-elles dues les erreurs ?

2 Estimation de l'erreur commise en utilisant la série de Fourier tronquée

On souhaite évaluer l'erreur qu'on commet lorsque le signal est approché par sa série de Fourier tronquée à n harmoniques. Pour ce faire on a besoin de mesurer l' écart entre les deux signaux.
On sait bien mesurer un écart entre deux nombres réels x et y ; c'est la valeur absolue de leur différence : $|x-y|$. On peut également exprimer cet écart en calculant l'écart relatif par rapport à x : $\dfrac{|x-y|}{|x|}$ (si $x \neq 0$).
La formule analogue pour mesurer l'écart relatif entre deux fonctions (ou grandeurs physiques) f et g (à valeurs réelles ou complexes) sur un intervalle $[a,b]$ est

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2 dt}} \tag{2}$$

1. Utiliser cette formule pour évaluer l'erreur entre le signal carré impair initial et le signal reconstitué en utilisant 5, 10 et 100 harmoniques. Que remarquez vous ?
2. Déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour obtenir une erreur relative inférieure à 0.1. On pourra utiliser une boucle `while`.
3. Coder la fonction `fouriertheo` à l'aide de la formule (1). Calculer à l'aide de la relation (2) l'écart relatif entre le signal initial et celui obtenu en utilisant une série de Fourier théorique composée de 5, 10 et 100 harmoniques. Les comparer aux erreurs obtenues à la question 1.
4. Tracer, en fonction du nombre d'harmoniques n, l'erreur relative commise en approchant le signal initial $u(t)$ par sa série de Fourier tronquée obtenue en utilisant les coefficients calculés numériquement ainsi qu'en utilisant les valeurs théoriques des coefficients. Considérer $n = 1, 2, 3, \ldots, 200$.
5. En théorie la précision de l'approximation du signal par sa série de Fourier tronquée ne dépend que du nombre d'harmoniques. En pratique, à votre avis, quels autres facteurs contribuent à la précision de cette approximation ?